

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă - iulie 2018
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
 - (i) Fie $a \in \mathbb{Z}$ și $z \in U_n$. Arătați că dacă r este restul împărțirii lui a la n , atunci $z^a = z^r$. Are loc reciproca pentru $n = 4$? Justificare.
 - (ii) Arătați că U_n este un subgrup al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot) .
 - (iii) Arătați că $f : U_n \rightarrow U_n$ definită prin $f(z) = |z|$ este un omomorfism al grupului (U_n, \cdot) în el însuși. Este f izomorfism de grupuri pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$? Justificare.
2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin $f(x, y, z) = (x - y, y + z, x + z)$.
 - (i) Arătați că f este o transformare liniară a \mathbb{R} -spațiului vectorial \mathbb{R}^3 în el însuși.
 - (ii) Determinați câte o bază și dimensiunea pentru nucleul $\text{Ker } f$ al lui f și imaginea $\text{Im } f$ a lui f .

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. Criteriul lui D'Alembert (raportului) pentru serii cu termeni pozitivi (enunț și demonstrație).
2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir descrescător cu termeni pozitivi. Studiați natura seriei

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(n!) \cdot a_1 a_2 \dots a_n}{a_1(a_2 + 1)(a_3 + 2) \dots (a_n + n - 1)}$$

3. Calculați primitiva

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. Considerăm punctele $A(3, 2)$ și $B(5, 1)$. Punctul P se alege astfel încât triunghiul APB să fie echilateral, iar dreapta AB să se afle între punctul P și origine. Determinați coordonatele punctului P , precum și coordonatele ortocentrului triunghiului APB .
2. Determinați ecuațiile perpendicularei din origine pe dreapta

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0, \\ 2x + 3y + 4z + 5 = 0. \end{cases}$$

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.
- Nota lucrării este media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte.
- Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă - iulie 2018
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu	1p
1. (i) demonstrarea egalității $z^a = z^r$	0.5p
justificarea că reciproca nu are loc	0.5p
(ii) U_n este un subgrup al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot)	2p
(iii) f este omomorfism de grupuri	1p
justificarea că f nu este izomorfism de grupuri pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$	1p
2. (i) f este transformare liniară	2p
(ii) determinarea unei baze și a dimensiunii lui $\text{Ker } f$	1p
(iii) determinarea unei baze și a dimensiunii lui $\text{Im } f$	1p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu	1p
1. (i) enunțul criteriului	1p
(ii) demonstrație	2p
2. (i) criteriul lui D'Alambert în cazul $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 1$	1 + 1 p
(ii) cazul $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$	1p
3. (i) substituția Euler: x și dx corect	0.5 + 1p
(ii) calcularea primitivei după substituție	1p
(iii) concluzia (revenire la x)	0.5p

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu	1p
1. (i) determinarea lungimii laturii triunghiului	0.5p
(ii) ecuația dreptei AB	0.5p
(iii) ecuația mediatoarei segmentului AB	1p
(iv) calculul înălțimii triunghiului echilateral	0.5p
(v) determinarea celor două soluții posibile pentru C	1p
(vi) identificarea soluției admisibile	0.5p
(vii) determinarea coordonatelor ortocentrului	0.5p
2. (i) determinarea unui vector director al dreptei date	1.5p
(ii) determinarea unui punct de pe dreapta dată	0.5p
(iii) ecuația planului care trece prin dreaptă și prin origine	1.5p
(iv) ecuația planului prin origine, perpendicular pe dreapta dată	0.5p
(v) ecuațiile dreptei căutate	0.5p