„Babeş-Bolyai“ Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2018 július
Matematika Szak

I. TÉTEL. Algebra

1. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
   (i) Legyen $a \in \mathbb{Z}$ és $z \in U_n$. Bizonyítsuk, hogy ha r az a szám n-nel való osztási maradéka, akkor $z^a = z^r$. Igaz-e az állítás fordítottja $n = 4$ esetén? Indoklás.
   (ii) Bizonyítsuk be, hogy $(U_n, \cdot)$ részcsoportja a $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportnak.
   (iii) Bizonyítsuk be, hogy az $f\colon U_n \to U_n$, $f(z) = |z|$ függvény csoportmorfizmus. Csoportizomorfizmus-e az f minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén? Indoklás.
2. Adott az $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y, y + z, x + z)$ függvény.
   (i) Bizonyítsuk be, hogy f lineáris transzformáció.
   (ii) Adjuk meg a $\operatorname{Ker} f$ és az $\operatorname{Im} f$ résszterek egy-egy bázisát, illetve határozzuk meg ezeknek a résztereknek a dimenzióit.

II. TÉTEL. Matematikai Analízis

1. Pozitív tagú sorok D'Alembert-féle (hányados) kritériuma (kijelentés és bizonyítás).
2. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú csökkenő sorozat. Tanulmányozzuk a
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!) \cdot a_1 a_2 \dots a_n}{a_1(a_2 + 1)(a_3 + 2) \dots (a_n + n - 1)}$$
sor konvergenciáját.
3. Számítsuk ki az
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$
határozatlan integrált.

III. TÉTEL. Mértan

1. Tekintsük az $A(3, 2)$ és $B(5, 1)$ pontokat a síkban. Legyen P az a pont a síkból, amelyre az APB háromszög egyenlő oldalú és az AB egyenes a P és az origó között helyezkedik el. Határozzuk meg a P pontnak és az ABC háromszög ortocentrumának a koordinátáit.
2. Határozzuk meg az origóból az
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0, \\ 2x + 3y + 4z + 5 = 0. \end{cases}$$
egyenesre bocsájtott merőleges egyenes egyenletét.

Megjegyzés
- Minden tétel kötelező. Minden tételhez teljes megoldás megadása szükséges.
- A dolgozatra kapott jegy a számtani átlaga a három tételre kapott jegynek.
- A minimális átmenő jegy 5,00.
- A munkaidő 3 óra.

Universitatea „Babeş-Bolyai"
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2018
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. (i) demonstrarea egalităţii $z^a = z^r$ 0.5p
justificarea că reciproca nu are loc 0.5p
(ii) U_n este un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ 2p
(iii) f este omomorfism de grupuri 1p
justificarea că f nu este izomorfism de grupuri pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ 1p

2. (i) f este transformare liniară 2p
(ii) determinarea unei baze şi a dimensiunii lui $\operatorname{Ker} f$ 1p
(iii) determinarea unei baze şi a dimensiunii lui $\operatorname{Im} f$ 1p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu 1p

1. (i) enunţul criteriului 1p
(ii) demonstraţie 2p

2. (i) criteriul lui D'Alambert în cazul $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$ .... 1 + 1 p
(ii) cazul $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ 1p

3. (i) substituţia Euler: x şi dx corect .... 0.5 + 1p
(ii) calcularea primitivei după substituţie 1p
(iii) concluzia (revenire la x) 0.5p

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. (i) determinarea lungimii laturii triunghiului 0.5p
(ii) ecuaţia dreptei AB 0.5p
(iii) ecuaţia mediatoarei segmentului AB 1p
(iv) calculul înălţimii triunghiului echilateral 0.5p
(v) determinarea celor două soluţii posibile pentru C 1p
(vi) identificarea soluţiei admisibile 0.5p
(vii) determinarea coordonatelor ortocentrului 0.5p

2. (i) determinarea unui vector director al dreptei date 1.5p
(ii) determinarea unui punct de pe dreapta dată 0.5p
(iii) ecuaţia planului care trece prin dreaptă şi prin origine 1.5p
(iv) ecuaţia planului prin origine, perpendicular pe dreapta dată 0.5p
(v) ecuaţiile dreptei căutate 0.5p