

Proba scrisă a examenului de licență
Specializarea Matematică Informatică

SUBIECTUL I. Algebră

a) Pe mulțimea \mathbb{R} definim operația $x * y = xy - 4x - 4y + 20$. Demonstrați că $(\mathbb{R} \setminus \{4\}, *)$ este un grup și că $(4, +\infty)$ este un subgrup al acestui grup.

b) Fie aplicația liniară de \mathbb{R} -spații vectoriale

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

Să se scrie matricea lui f în baza canonică a lui \mathbb{R}^3 și să se determine dimensiunile subspațiilor $\text{Im}(f)$ și $\text{Ker}(f)$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

a) Calculați $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

b) Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k$.

c) Să se precizeze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

SUBIECTUL III. Geometrie

Se consideră dreptunghiul $ABCD$ care are aria 20, vârfurile $A(-3, 1)$ și $B(-2, 4)$ și are vârful C în primul cadran.

a) Să se determine ecuațiile laturilor acestui dreptunghi.

b) Să se scrie ecuația cercului circumscris dreptunghiului $ABCD$.

SUBIECTUL IV. Informatică

Scrieți un program într-unul din limbajele de programare Python, C++, Java, C# care:

a) (1.50p) Definiște o clasă **Film** având ca atribute protejate: *titlu* de tip șir de caractere, *anApariție* de tip număr întreg, iar ca metode publice:

a.1 Constructor cu parametri pentru inițializarea tuturor atributelor,

a.2 Metoda *getInfo* care returnează următoarea descriere sub forma unui șir de caractere: *titlu-anApariție* (de exemplu: "Casablanca-1942"),

a.3 Metoda *vechime* care calculează și returnează numărul de ani scurși până în prezent de la apariția filmului.

b) (3.00p) Definiște o clasă **ListăDeFilme** având un atribut privat *filme* de tip tablou cu elemente de tipul **Film**, iar ca metode publice:

- b.1 Constructor fără parametri,
- b.2 Metode accesori de tip *get* și *set* pentru atributul *filme*,
- b.3 Metoda *adaugă(f)* pentru adăugarea unui film *f* în tabloul *filme* (considerând că în tablou nu pot exista două filme cu același titlu),
- b.4 Metoda *filtruFilme(ani)*, unde parametrul *ani* este un număr întreg, care păstrează în mulțimea de filme doar pe acelea a căror vechime este mai mică strict decât *ani*.
- c) (0.50p) Definește o funcție *afișare(listă)*, unde parametrul *listă* este de tipul **ListăDeFilme**, care afișează la ieșirea standard filmele din *listă*.
- d) (0.75p) Definește o funcție *prelucrare()* care:
- d.1 Construiește o listă de tipul **ListăDeFilme** formată din următoarele filme: (Casablanca, 1942), (Titanic, 2007) și (Bohemian Rhapsody, 2018),
- d.2 Filtrează din listă filmele apărute după anul 2000 (folosind metoda *filtruFilme*) și returnează lista filtrată de tipul **ListăDeFilme**.
- e) (0.75p) Definește o clasă **Documentar** derivată din clasa **Film** având ca atribut privat *domeniu* de tip șir de caractere, iar ca metode publice:
- e.1 Constructor cu parametri pentru inițializarea tuturor atributelor,
- e.2 Metoda *getInfo* care returnează următoarea descriere sub forma unui șir de caractere: *titlu-anApariție-domeniu* (de exemplu: "March of the Penguins-2005-Natură").
- f) (1.00p) Definește o funcție *sortare(lista)*, unde parametrul *lista* este de tipul **ListăDeFilme**, care sortează filmele alfabetic după șirul de caractere returnat de metoda *getInfo*.
- g) (1.00p) Definește funcția principală a programului care:
- g.1 Afișează lista de tipul **ListăDeFilme** construită folosind funcția *prelucrare*,
- g.2 Adaugă documentarul (March of the Penguins, 2005, Natură) listei construite,
- g.3 Sortează filmele din listă (folosind funcția *sortare*) și afișează lista sortată.
- (0.50p) Stil (comentarii, indentare, nume sugestive, etc.).
- (1.00p) Oficiu.

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.
- Media lucrării se calculează ca medie ponderată: $\frac{2}{3}$ · Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică + $\frac{1}{3}$ · Nota de la subiectul de Informatică.
- Pentru fiecare subiect se acorda o notă întreagă de la 1 la 10. Pentru o lucrare, nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Proba scrisă a examenului de licență, 2019
 Specializarea Matematică Informatică
 BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

- Oficiu 1 p
- a)
- $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ este parte stabilă 1p
 - $*$ este asociativă 1p
 - $e = 5$ este element neutru 1p
 - Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ există $x' = \frac{1}{x-4} + 4 \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$ 1p
 - $(4, +\infty) \neq \emptyset$ 0,5p
 - $(4, +\infty)$ este parte stabilă 1p
 - Pentru orice $x \in (4, +\infty)$, inversul $x' \in (4, +\infty)$ 1p
- b)
- matricea lui f 1p
 - $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 2$ 1p
 - $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) = 1$ 0,5p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

- Oficiu 1 p
- a) Avem
- $$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln(1+x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \dots\dots\dots 1 p$$
- deci
- $$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 1 p$$
- b) Fie $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k$. Avem
- $$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \sigma(f, \Delta_n, \xi_n),$$
- unde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, este funcția definită prin $f(x) = x \ln(1+x)$, Δ_n este diviziunea lui $[0, 1]$ definită prin $\Delta_n = (0, 1/n, 2/n, \dots, 1)$, iar $\xi_n = (1/n, 2/n, \dots, 1) \in P(\Delta_n)$ 2 p
- Întrucât $\|\Delta_n\| = 1/n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, rezultă că
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 f(x) dx \dots\dots\dots 2 p$$
- c) Fie $b_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ și $c_n = \frac{1}{n^2}$. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Conform criteriului comparației la limită, seriile $\sum_{n \geq 1} b_n$ și $\sum_{n \geq 1} c_n$ au aceeași natură 1 p

Cum seria $\sum_{n \geq 1} c_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că și seria $\sum_{n \geq 1} b_n$ este convergentă ... 1 p

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1 p

a)

Panta dreptei AB ($m_{AB} = 3$) și ecuația dreptei $AB : 3x - y + 10 = 0$ 1 p

Panta dreptelor AD și BC : $m = -1/3$ 0,5 p

Ecuația dreptei $BC : x + 3y - 10 = 0$ 0,5 p

Ecuația dreptei $AD : x + 3y = 0$ 0,5 p

Din aria dreptunghiului avem că lungimea lui BC este $2\sqrt{10}$ 0,5 p

Ecuația dreptei CD este de forma $3x - y + c = 0$ 1 p

$d(A, CD) = 2\sqrt{10} \implies |c - 10| = 20$ 1 p

Pentru $c = 30$ se obține $CD : 3x - y + 30 = 0$ și $C(-8, 6)$, nu convine 1 p

Pentru $c = -10$ avem $CD : 3x - y - 10 = 0$ și $C(4, 2)$, convine 1 p

b)

Centrul cercului este la mijlocul segmentului $[AC]$, adică $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 0,5 p

Raza cercului este $r = MA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 0,5 p

Ecuația cercului: $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{50}{4}$ 1 p

SUBIECTUL IV. Informatică

a) (1.50p) Clasa **Film**

a.1 Constructor 0.50p

a.2 Metoda *getInfo* 0.50p

a.3 Metoda *vechime* 0.50p

b) (3.00p) Clasa **ListăDeFilme**

b.1 Constructor 0.50p

b.2 Metode accesori 0.50p

b.3 Metoda *adaugă(f)* 1.00p

b.4 Metoda *filtruFilme(ani)* 1.00p

c) (0.50p) Funcția *afișare(listă)* 0.50p

d) (0.75p) Funcția *prelucrare()*:

d.1	Construire listă	0.25p
d.2	Filtrare	0.50p
e)	(0.75p) Clasa Documentar	
e.1	Constructor	0.25p
e.2	Metoda <i>getInfo</i>	0.50p
f)	(1.00p) Funcția <i>sortare(lista)</i>	1.00p
g)	(1.00p) Definiere funcția principală	
g.1	Afișare listă returnată de <i>prelucrare</i>	0.50p
g.2	Adăugare documentar	0.25p
g.3	Sortare și afișare	0.25p
	(0.50p) Stil (comentarii, indentare, nume sugestive, etc.)	0.50p
	(1.00p) Oficiu	1.00p

Notă.

- Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.