

Záróvizsga, Írásbeli vizsga, 2019
Informatikai matematika szak

I. Algebra

a) Az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezzük az $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ műveletet. Igazoljuk, hogy $(\mathbb{R} \setminus \{4\}, *)$ csoport és a $(4, +\infty)$ részcsoportja ennek a csoportnak.

b) Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

egy lineáris függvény az $\mathbb{R}$ feletti vektorterek közt. Írjuk fel az f mátrixát az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisában és határozzuk meg az $\text{Im}(f)$ és $\text{Ker}(f)$ részterek dimenzióit.

II. Matematikai analízis

a) Számítsuk ki az $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$ integrált.

b) Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k$ határértéket.

c) Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sor természetét.

III. Mértan

Legyen az $ABCD$ téglalap területe 20, $A(-3, 1)$ és $B(-2, 4)$ pedig két szomszédos csúcs. Feltételezzük, hogy a C csúcs az első negyedben van.

a) Határozzuk meg az $ABCD$ téglalap oldalainak egyenleteit.

b) Írjuk fel az $ABCD$ téglalap köré írt kör egyenletét.

IV. Informatika Írjunk programot a Python, C++, Java, C# programozási nyelvek egyikében, amely:

a) (1.50p) egy *Film* nevű osztályt vezet be a következő védett attribútumokkal: *cim* karakterlánc típusú és *megjelenesEve* egész típusú. Továbbá, az alábbi publikus metódusokat adjuk meg:

a.1 *paraméterekkel rendelkező konstruktor* az összes attribútum inicializálására,

a.2 a *getInfo* metódus, amely az alábbi, karakterláncként megadott leírást téríti vissza: *cim - megjelenesEve* (például "Casablanca-1942").

a.3 a *regiseg* metódus, amely kiszámolja és visszatéríti a film megjelenésétől eltelt évek számát.

b) (3.00p) Adjunk meg egy *FilmekListaja* osztályt a *filmek* privát attribútummal, amelynek típusa egy *Film* típusú elemekből álló táblázat, valamint az alábbi nyilvános metódusokkal:

b.1 paraméter nélküli *konstruktor*,

b.2 *getter* és *setter* típusú hozzáférési metódusok a *filmek* attribútumhoz,

- b.3 a *hozzaad(f)* metódus, amely a paraméterként megadott *f* filmet adja hozzá a *filmek* táblázathoz (úgy, hogy a táblázat ne tartalmazhasson két azonos címmel rendelkező filmet).
- b.4 a *filmekSzurese(evek)* metódus, ahol *evek* egy egész szám. A metódus csak azokat a filmeket tartja meg a listában, amelyeknek a régisége szigorúan kisebb mint *evek*.
- c) (0.5p) Vezessünk be egy *kiir(lista)* függvényt, ahol *lista* **FilmekListaja** típusú, és a szabványos kimenetre kiírja a listában található filmeket.
- d) (0.75p) Vezessünk be egy *feldolgoz()* függvényt, amely
- d.1 egy **FilmekListaja** típusú listát hoz létre az alábbi filmekkel: (Casablanca, 1942), (Titanic, 2007) és (Bohemian Rhapsody, 2018)
- d.2 a *filmekSzurese* metódus felhasználásával szűri ki azokat a filmeket, amelyek 2000 után jelentek meg és visszatéríti a szűrés által kapott **FilmekListaja** típusú listát.
- e) (0.75p) Vezessünk be egy *Dokumentumfilm* nevű osztályt, amely a *Film* leszármazottja, a *temakor* karakterlánc típusú privát attribútummal és az alábbi nyilvános metódusokkal:
- e.1 paraméterekkel rendelkező konstruktor az összes attribútum inicializálására;
- e.2 a *getInfo* metódus, amely az alábbi, karakterláncként megadott, leírást téríti vissza: cím - megjelenésEve-temakor (például "March of the Penguins-2005-természet").
- f) (1.00p) Adjunk meg egy *rendezes(lista)* függvényt, ahol *lista* **FilmekListaja** típusú, amely ábécé szerinti sorrendbe rendezi a filmeket a *getInfo* metódus által visszatérített karakterlánc szerint.
- g) (1.00p) A program fő függvényében
- g.1 írjuk ki a **FilmekListaja** típusú listát, melyet a *feldolgoz()* függvénnyel hoztunk létre,
- g.2 adjuk hozzá a (March of the Penguins, 2005. természet) dokumentumfilmet a létrehozott listához,
- g.3 a *rendezes(lista)* függvény felhasználásával rendezzük a listában lévő filmeket és írjuk ki a rendezett listát.
- (0.50p) Stílus (megjegyzések, bekezdés, jellemző nevek, stb.)
- (1.00p) Hivatalból.

Megjegyzések.

- Munkaidő: 3 óra.
- Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
- Minden tételre egész jegyet ad 1 és 10 között mindkét javító. Egy dolgozat esetén a legkisebb átmenő jegy 5.

- Az írásbelire adott végleges jegy: $\frac{2}{3}(JegyI + JegyII + JegyIII) + \frac{1}{3}JegyIV$.

Proba scrisă a examenului de licență, 2019
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

- Oficiu 1 p
- a)
- $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ este parte stabilă 1p
 - $*$ este asociativă 1p
 - $e = 5$ este element neutru 1p
 - Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ există $x' = \frac{1}{x-4} + 4 \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$ 1p
 - $(4, +\infty) \neq \emptyset$ 0,5p
 - $(4, +\infty)$ este parte stabilă 1p
 - Pentru orice $x \in (4, +\infty)$, inversul $x' \in (4, +\infty)$ 1p
- b)
- matricea lui f 1p
 - $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 2$ 1p
 - $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) = 1$ 0,5p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

- Oficiu 1 p
- a) Avem
- $$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln(1+x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \quad \dots\dots\dots 1 p$$
- deci
- $$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots 1 p$$
- b) Fie $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)^k$. Avem
- $$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \sigma(f, \Delta_n, \xi_n),$$
- unde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, este funcția definită prin $f(x) = x \ln(1+x)$, Δ_n este diviziunea lui $[0, 1]$ definită prin $\Delta_n = (0, 1/n, 2/n, \dots, 1)$, iar $\xi_n = (1/n, 2/n, \dots, 1) \in P(\Delta_n)$ 2 p
- Întrucât $\|\Delta_n\| = 1/n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, rezultă că
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 f(x) dx \quad \dots\dots\dots 2 p$$
- c) Fie $b_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ și $c_n = \frac{1}{n^2}$. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Conform criteriului comparației la limită, seriile $\sum_{n \geq 1} b_n$ și $\sum_{n \geq 1} c_n$ au aceeași natură 1 p

Cum seria $\sum_{n \geq 1} c_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că și seria $\sum_{n \geq 1} b_n$ este convergentă ... 1 p

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1 p

a)

Panta dreptei AB ($m_{AB} = 3$) și ecuația dreptei $AB : 3x - y + 10 = 0$ 1 p

Panta dreptelor AD și BC : $m = -1/3$ 0,5 p

Ecuația dreptei $BC : x + 3y - 10 = 0$ 0,5 p

Ecuația dreptei $AD : x + 3y = 0$ 0,5 p

Din aria dreptunghiului avem că lungimea lui BC este $2\sqrt{10}$ 0,5 p

Ecuația dreptei CD este de forma $3x - y + c = 0$ 1 p

$d(A, CD) = 2\sqrt{10} \implies |c - 10| = 20$ 1 p

Pentru $c = 30$ se obține $CD : 3x - y + 30 = 0$ și $C(-8, 6)$, nu convine 1 p

Pentru $c = -10$ avem $CD : 3x - y - 10 = 0$ și $C(4, 2)$, convine 1 p

b)

Centrul cercului este la mijlocul segmentului $[AC]$, adică $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 0,5 p

Raza cercului este $r = MA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 0,5 p

Ecuația cercului: $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{50}{4}$ 1 p

SUBIECTUL IV. Informatică

a) (1.50p) Clasa **Film**

a.1 Constructor 0.50p

a.2 Metoda *getInfo* 0.50p

a.3 Metoda *vechime* 0.50p

b) (3.00p) Clasa **ListăDeFilme**

b.1 Constructor 0.50p

b.2 Metode accesori 0.50p

b.3 Metoda *adaugă(f)* 1.00p

b.4 Metoda *filtruFilme(ani)* 1.00p

c) (0.50p) Funcția *afișare(listă)* 0.50p

d) (0.75p) Funcția *prelucrare()*:

d.1 Construire listă	0.25p
d.2 Filtrare	0.50p
e) (0.75p) Clasa Documentar	
e.1 Constructor	0.25p
e.2 Metoda <i>getInfo</i>	0.50p
f) (1.00p) Funcția <i>sortare(lista)</i>	1.00p
g) (1.00p) Definire funcția principală	
g.1 Afișare listă returnată de <i>prelucrare</i>	0.50p
g.2 Adăugare documentar	0.25p
g.3 Sortare și afișare	0.25p
(0.50p) Stil (comentarii, indentare, nume sugestive, etc.)	0.50p
(1.00p) Oficiu	1.00p

Notă.

- Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.