UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 2017
Specializarea Matematică Informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1) a) Enunţaţi teorema de caracterizare a subgrupului.
b) Daţi un exemplu de grup în care daţi apoi un exemplu de subgrup şi un exemplu de submulţime care nu este subgrup. Justificaţi răspunsurile date.

2) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ considerăm

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \text{ şi } B = \langle (0,1,0,1),\ (1,0,1,0) \rangle.$$

a) Să se arate că A este subspaţiul $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^4$ generat de vectorii $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,1,1)$.
b) Să se determine dimensiunea şi câte o bază pentru fiecare dintre subspaţiile $A + B$ şi $A \cap B$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie al lui f.

a) Să se determine D şi $f^{(n)}(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in D$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in \mathbb{R}$

$$\big(T_{2n+1} f\big)(x) = -2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right),$$

unde $T_{2n+1} f$ reprezintă polinomul Taylor de ordin $2n + 1$ ataşat funcţiei f şi punctului $x_0 = 0$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{1-x}{1+x} + 2 \sin x}{x^3}$.

SUBIECTUL III. Geometrie

a) Definiţia elipsei. Deduceţi ecuaţia canonică a elipsei.

b) Pe elipsa de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se dau punctele fixate $A(a, 0), A'(-a, 0)$ şi punctul variabil $M(x_0, y_0)$. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MAA' când punctul M parcurge elipsa.

SUBIECTUL IV. Informatică

Scrieţi un program într-unul din limbajele de programare Python, C++, Java, C# care:

a) (2p) **Defineşte o clasă** *Angajat* având ca atribute private: *nume* de tip şir de caractere, *salar* de tip real şi *studii* de tip şir de caractere, iar ca metode publice: 1) *constructor* pentru iniţializarea atributelor *nume, salar şi studii*, 2) metode accesor de tip *get* pentru atributul nume şi pentru atributul studii, 3) metodă accesor de tip *set* pentru atributul salar, 4) metoda *toString* care returnează următoarea reprezentare sub forma de şir de caractere pentru un angajat: nume salar studii. Atributul *studii* din clasa *Angajat* va avea una dintre următoarele trei valori: "Superioare", "Medii", "Elementare".

b) (1.5p) **Defineşte o clasă** *ListaDeAngajati* având ca atribute private: 1) *nrAngajati* de tip întreg, 2) *angajati* de tip tablou cu elemente de tipul *Angajat*, iar ca metode publice: 1) un constructor fără parametrii, 2) metoda *adauga* pentru adăugarea unui angajat, specificat ca parametru al metodei, în tabloul *angajati*, 3) metoda *elementAt* care returnează angajatul de pe o anumit poziţie, specificată ca parametru al metodei, 4) metoda *getNrAngajati()* care returnează numărul de anagajati din tablou.

c) (1.5p) **Defineşte o funcţie** care construieşte şi returnează o listă de tipul *ListaDeAngajati*, formată din 3 angajati: unul cu studii "Medii", unul cu studii "Superioare" şi unul cu studii "Elementare".

d) (1.5p) **Defineşte o funcţie** care primeşte ca parametru o listă de angajaţi de tipul *ListaDeAngajati* şi aplică o mărire salarială de 10% tuturor angajaţilor din lista dată, care au studii "Medii".

e) (1.5p) **Defineşte o funcţie** care primeşte ca parametru o listă de angajaţi de tipul *ListaDeAngajati* şi afişează la ieşirea standard lista dată, apelând metoda *toString()* din clasa *Angajat*.

f) (1p) Construieşte în **funcţia principală** a programului o listă de angajaţi (apelând funcţia de la punctul (c)), afişează lista de angajaţi (apelând funcţia de la punctul (e)), aplică mărirea salarială (apelând funcţia de la punctul (d)), apoi afişeaz din nou lista de angajaţi după aplicarea măririi salariale (apelând funcţia de la punctul (e)).

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Media lucrării se calculează ca şi medie ponderată: $\frac{2}{3}\cdot$ Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică $+\frac{1}{3}\cdot$ Nota de la subiecul de Informatică.
- Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... 1 pt
1) a) Teorema de caracterizare a subgrupului - enunţ .... 0,5 pt
b) Exemplu de grup .... 0,5 pt
Exemplu de subgrup .... 0,5 pt
Exemplu de submulţime care nu este subgrup .... 0,5 pt
Justificare .... 1 pt
Observaţie: Pentru exemplele care sunt construite în aşa fel încât să nu fie necesare demonstraţii ulterioare, se acordă punctajul complet (2,5 pt). **O astfel de situaţie ar fi:** În grupul aditiv $(\mathbb{Z},+)$ al numerelor întregi, subgrupul nul $\{0\}$ este subgrup (ca, de altfel, în orice grup), iar din teorema de caracterizare de la a) rezultă că mulţimea vidă nu este subgrup.

2) a) Folosim faptul că subspaţiul generat de o (sub)mulţime nevidă este mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elemente din această mulţime şi avem:

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1,x_2,x_3,x_1+x_2+x_3) \mid x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,0,0,1)+x_2(0,1,0,1)+x_3(0,0,1,1) \mid x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\rangle \end{aligned}$$ .... 2 pt

b) $\dim A = 3$, $\dim B = 2$ .... 1 pt
$\dim(A+B)$ este rangul matricii formate cu vectorii $(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)$ şi $(1,0,1,0)$ (care sunt vectorii din reuniunea celor două baze, a lui A şi a lui B).
Prin urmare $\dim(A+B)=4$ şi cei 4 vectori formează o bază .... 1 pt
$\dim(A\cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A+B) = 1$ .... 1 pt
$(0,1,0,1) \in A\cap B$, în consecinţă formează o bază în $A\cap B$ .... 1 pt

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... 1 pt
a) $D=(-1,1)$ şi $f'(x) = \dfrac{-2}{1-x^2} = \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$ oricare ar fi $x\in D$. .... 1 pt
Intuirea formulei $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-1)^n} - \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$ oricare ar fi $x\in D$ .... 1 pt
şi demonstrarea acesteia prin inducţie .... 2 pt

b) $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,[(-1)^n-1] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -2(n-1)! & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$ .... 1 pt

$f(0)=0 \;\Rightarrow\; \big(T_{2n+1}f\big)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{-2(2k)!}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = -2\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ .... 1 pt

c) Din teorema 2.2.2 din manual rezultă că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1-x}{1+x} + 2x + \frac{2}{3}x^3}{x^3} = 0,$$

deci $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}+2x}{x^3} = -\frac{2}{3}$ (1) .... 1 pt

Se ştie că

$$\big(T_{2n+1}\sin\big)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

deci (aplicând din nou teorema 2.2.2 din manual)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right)}{x^3} = 0,$$

de unde $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - 2x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$ (2) .... 1 pt

Prin adunarea relaţiilor (1) şi (2) obţine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\frac{1-x}{1+x} + 2\sin x}{x^3} = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = -1$ .... 1 pt

SUBIECTUL III. Geometrie Oficiu .... 1 pt

a)

– Definiţia elipsei 1pt

– Alegerea sistemului de coordonate 2pt

– Deducerea ecuaţiei 2pt

b)

– Determinarea centrului de greutate al triunghiului MAA' 2pt

– Determinarea locului geometric. Locul geometric este elipsa de ecuaţie: $\dfrac{x_0^2}{(\frac{a}{3})^2} + \dfrac{y_0^2}{(\frac{b}{3})^2} = 1$ 2pt

SUBIECTUL IV. Informatică

Oficiu .... 1 pt

a) Definirea clasei Angajat .... 2 pt

din care

– atribute .... 3* 0.25 =0.75 pt

– metode .... 5*0.25=1.25pt

b) Definirea clasei ListaDeAngajati 1.5pt

din care

– atribute .... 2*0.25=0.5pt

– metode .... 4*0.25 = 1p

c) Construirea listei de angajaţi 1.5p

din care

– antet metodă 0.5pt

0.75p=3*0.25 –pentru fiecare angajat creat .... 0.75p=3*0.25

– returnare rezultat .... - 0.25p

d) Funcţia de aplicare a măririi salariale 1.5p

din care

- antet metodă 0.5pt

- implementare metodă 1pt

e) Funcţia de afişare listă de angajaţi 1.5p

din care

– antet metodă 0.5pt

–implementare metodă 1pt

f) Funcţia principală 1pt

din care

- fiecare apel .... 4*0.25 pt.

Notă.

- Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.
- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Media lucrării se calculează ca şi medie ponderată: $\frac{2}{3}\cdot$ Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică $+\frac{1}{3}\cdot$ Nota de la subiecul de Informatică.

- Pentru o lucrare, nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.