Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli vizsga – 2017.
Matematika–Informatika szak

I. Algebra

1) a) Jelentsük ki a részcsoportok jellemzési tételét.
b) Adjunk példát csoportra és ebben adjunk példát részcsoportra és olyan részhalmazra, amely nem részcsoport. Indokoljuk meg a válaszokat.

2) Az $\mathbb{R}$- feletti $\mathbb{R}^4$ lineáris térben adottak az

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \text{ és } B = \langle (0,1,0,1),\ (1,0,1,0) \rangle.$$

halmazok.
a) Mutassuk ki, hogy A résztere az $\mathbb{R}^4$-nek, amelyet az $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,1,1)$ vektorok generálnak.
b) Határozzuk meg az $A+B$ és az $A \cap B$ részterek dimenzióját és egy–egy bázisát.

II. Matematikai analízis

Legyen az $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$ függvény, ahol $D \subset \mathbb{R}$ az f maximális értelmezési tartománya.

a) Határozzuk meg D-t és $f^{(n)}(x)$-et bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in D$ esetén.

b) Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\big(T_{2n+1}f\big)(x) = -2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right),$$

ahol $T_{2n+1}f$ az f függvény $x_0 = 0$ pontjához rendelt $2n+1$-ed rendű Taylor polinomot jelöli.

c) Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{1-x}{1+x} + 2\sin x}{x^3}$ határértéket.

III. Geometria

a) Az ellipszis értelmezése. Vezessük le az ellipszis kanonikus egyenletét.

b) Az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszisen adottak az $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ rögzített pontok és az $M(x_0, y_0)$ változó pont. Határozzuk meg az MAA' háromszög súlypontjának mértani helyét amikor M leírja az ellipszist.

IV. Informatika

Írjunk programot a Python, C++, Java, C# programozási nyelvek egyikében, amely:

a) (2p) egy *Alkalmazott* nevű osztályt vezet be a következő privát attribútumokkal: *nev* karakterlánc típusú, *fizetes* valós típusú és *tanulmanyok* karakterlánc típusú. Továbbá, az alábbi publikus metódusokat adjuk meg: 1) *konstruktor* a *nev, fizetes* és *tanulmanyok* attribútumok inicializálására, 2) *getter* típusú hozzáférési metódusok a *nev* és *tanulmanyok* attribútumok visszatérítésére, 3) *setter* típusú hozzáférési metódus a *fizetes* attribútum beállítására, 4) a *toString* metódus, amely egy alkalmazott esetén az alábbi módon kpezett karakterláncot térti vissza: *nev fizetes tanulmanyok*. Az *Alkalmazott* osztály *tanulmanyok* attribútuma a következő három érték egyikét veheti fel: ″Felsofoku″, ″Kozepfoku″, ″Alapfoku″.

b) (1.5p) Adjunk meg egy *AlkalmazottakListaja* osztályt az alábbi privát attribútumokkal: 1) *alkalmazottakSzama* egész típusú, 2) *alkalmazottak*, melynek típusa *Alkalmazott* elemekből álló táblázat, és a következő publikus metódusokkal: 1) egy paraméter nélküli *konstruktor*, 2) a *hozzaad* metódus amely egy paraméterként megadott alkalmazottat ad hozzá az *alkalmazottak* táblázathoz, 3) az *elementAt* metódus, amely egy adott, paraméterként specifikált, pozíción lévő alkalmazottat térít vissza, 4) a *getAlkalmazottakSzama()* metódus, amely a táblázatbeli alkalmazottak számát adja vissza.

c) (1.5p) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *AlkalmazottakListaja* típusú listát hoz létre és térít vissza, az alábbi három alkalmazottal: egy "Kozepfoku", egy "Felsofoku", illetve egy "Alapfoku" tanulmányokkal rendelkezővel.

d) (1.5p) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *AlkalmazottakListaja* típusú listát kap paraméterként és az összes "Kozepfoku" tanulmányokkal rendelkező alkalmazottnak a fizetését megemeli 10%-al.

e) (1.5p) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *AlkalmazottakListaja* típusú listát kap paraméterként és az *Alkalmazott* osztály *toString* metódusának meghívása által kiírja a lista tartalmát.

d) (1p) A program fő függvényében hozzunk létre egy alkalmazottakból álló listát a c) pontban megadott függvény meghívása által, írjuk ki az alkalmazottak listáját az e) pontban megadott függvény meghívása által, alkalmazzuk a fizetésemelést a d) pontban megadott függvény meghívásával, végül írjuk ki újból az alkalmazottak listáját az e) pontban megadott függvény meghívásával.

Megjegyzések:

- Minden tétel kötelező. Minden tétel esetén kérjük a teljes megoldásokat.
- Átmenő jegy az 5-ös általános.
- Általános= $\frac{2}{3}(JegyI. + JegyII. + JegyIII.) + \frac{1}{3}JegyIV.$
- Munkaidő 3 óra.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... 1 pt
1) a) Teorema de caracterizare a subgrupului - enunţ .... 0,5 pt
b) Exemplu de grup .... 0,5 pt
Exemplu de subgrup .... 0,5 pt
Exemplu de submulţime care nu este subgrup .... 0,5 pt
Justificare .... 1 pt
Observaţie: Pentru exemplele care sunt construite în aşa fel încât să nu fie necesare demonstraţii ulterioare, se acordă punctajul complet (2,5 pt). **O astfel de situaţie ar fi:** În grupul aditiv $(\mathbb{Z},+)$ al numerelor întregi, subgrupul nul $\{0\}$ este subgrup (ca, de altfel, în orice grup), iar din teorema de caracterizare de la a) rezultă că mulţimea vidă nu este subgrup.

2) a) Folosim faptul că subspaţiul generat de o (sub)mulţime nevidă este mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elemente din această mulţime şi avem:
$A=\{(x_1,x_2,x_3,x_1+x_2+x_3)\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$
$=\{x_1(1,0,0,1)+x_2(0,1,0,1)+x_3(0,0,1,1)\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$
$=\langle(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\rangle$ .... 2 pt
b) $\dim A=3$, $\dim B=2$ .... 1 pt
$\dim(A+B)$ este rangul matricii formate cu vectorii $(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)$ şi $(1,0,1,0)$ (care sunt vectorii din reuniunea celor două baze, a lui A şi a lui B).
Prin urmare $\dim(A+B)=4$ şi cei 4 vectori formează o bază .... 1 pt
$\dim(A\cap B)=\dim A+\dim B-\dim(A+B)=1$ .... 1 pt
$(0,1,0,1)\in A\cap B$, în consecinţă formează o bază în $A\cap B$ .... 1 pt

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... 1 pt
a) $D=(-1,1)$ şi $f'(x)=\dfrac{-2}{1-x^2}=\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ oricare ar fi $x\in D$. .... 1 pt
Intuirea formulei $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-1)^n}-\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$ oricare ar fi $x\in D$ .... 1 pt
şi demonstrarea acesteia prin inducţie .... 2 pt
b) $f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!\,[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & \text{dacă } n \text{ este par}\\ -2(n-1)! & \text{dacă } n \text{ este impar.}\end{cases}$ .... 1 pt

$f(0)=0\ \Rightarrow\quad \big(T_{2n+1}f\big)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{-2(2k)!}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}=-2\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ .... 1 pt

c) Din teorema 2.2.2 din manual rezultă că

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}+2x+\frac{2}{3}x^3}{x^3}=0,$$

deci $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}+2x}{x^3}=-\frac{2}{3}$ (1) .... 1 pt

Se ştie că

$$\big(T_{2n+1}\sin\big)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$

deci (aplicând din nou teorema 2.2.2 din manual)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right)}{x^3} = 0,$$

de unde $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - 2x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$ (2) .... 1 pt

Prin adunarea relaţiilor (1) şi (2) obţine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \frac{1-x}{1+x} + 2\sin x}{x^3} = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = -1$ .... 1 pt

SUBIECTUL III. Geometrie Oficiu .... 1 pt

a)
– Definiţia elipsei 1pt
– Alegerea sistemului de coordonate 2pt
– Deducerea ecuaţiei 2pt

b)
– Determinarea centrului de greutate al triunghiului MAA' 2pt
– Determinarea locului geometric. Locul geometric este elipsa de ecuaţie: $\dfrac{x_0^2}{(\frac{a}{3})^2} + \dfrac{y_0^2}{(\frac{b}{3})^2} = 1$ 2pt

SUBIECTUL IV. Informatică

Oficiu .... 1 pt
a) Definirea clasei Angajat .... 2 pt
din care
– atribute .... 3* 0.25 =0.75 pt
– metode .... 5*0.25=1.25pt
b) Definirea clasei ListaDeAngajati 1.5pt
din care
– atribute .... 2*0.25=0.5pt
– metode .... 4*0.25 = 1p
c) Construirea listei de angajaţi 1.5p
din care
– antet metodă 0.5pt
0.75p=3*0.25 –pentru fiecare angajat creat .... 0.75p=3*0.25
– returnare rezultat .... - 0.25p
d) Funcţia de aplicare a măririi salariale 1.5p
din care
- antet metodă 0.5pt
- implementare metodă 1pt
e) Funcţia de afişare listă de angajaţi 1.5p
din care
– antet metodă 0.5pt
–implementare metodă 1pt
f) Funcţia principală 1pt
din care
- fiecare apel .... 4*0.25 pt.

Notă.

- Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.
- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Media lucrării se calculează ca şi medie ponderată: $\frac{2}{3}\cdot$ Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică $+\frac{1}{3}\cdot$ Nota de la subiecul de Informatică.

- Pentru o lucrare, nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.