Babeș-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli vizsga – 2016. június 27.
Matematika-Informatika szak

I. 1. a) Értelmezzük egy csoport részcsoportjának fogalmát.
b) Igazoljuk, hogy $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ nem részcsoportja a $(\mathbb{Z}, +)$ csoportnak.
c) Igazoljuk, hogy ha G egy csoport és H_1, H_2 részcsoportjai G-nek, akkor igaz a következő ekvivalencia: $H_1 \cup H_2$ részcsoportja G-nek akkor és csakis akkor, ha $H_1 \subseteq H_2$ vagy $H_2 \subseteq H_1$.

2. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+2y, y-z)$.
a) Igazoljuk, hogy az f függvény $\mathbb{R}$-lineáris.
b) Igazoljuk, hogy $v = ((1,0,1),(1,1,0),(1,1,1))$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban és $w = ((1,1),(1,0))$ bázis $\mathbb{R}^2$-ben.
c) Határozzuk meg az $[f]_{v,w}$ mátrixot.

II. 1. Határozzuk meg az összes olyan $a \in (0,\infty)$ értéket, melyre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{2n}^{n} a^n$ sor konvergens.

2. Határozzuk meg az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}; \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x+e^x}.$$

III. Az $y^2 = 2px$ parabolán tekintsük az a,b,c ordinátájú A,B,C pontokat, ahol $a,b,c \in \mathbb{R}$. Legyen A' a B és C pontokban szerkesztett érintők metszéspontja, B' az A és C pontokban szerkesztett érintők metszéspontja, C' pedig az A és B pontokban szerkesztett érintők metszéspontja.

a) Határozzuk meg az A', B', C' pontok koordinátáit.
b) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög területe kétszerese az $A'B'C'$ háromszög területének.
c) Ha G és G' az ABC- illetve $A'B'C'$ háromszög súlypontja, igazoljuk, hogy a GG' egyenes párhuzamos a parabola tengelyével.

IV. Írjunk programot a Python, C++, Java, C# programozási nyelvek egyikében, amely:

a) egy *ArverezettObjektum* osztályt vezet be az *elnevezes* karakterlánc típusú privát attribútummal és a *kezdetiAr* egész típusú privát attribútummal. Továbbá adjunk meg egy konstruktort az *elnevezes* és a *kezdetiAr* attribútumok inicializálására, valamint egy nyilvános *getElnevezes()* metódust az *elnevezes* visszatérítésére, és egy nyilvános *getKezdetiAr()* metódust a *kezdetiAr* visszatérítésére.

b) Adjunk meg egy *ObjektumokTablazata* osztályt az *elemekSzama* egész típusú privát attribútummal és az *elem* privát attribútummal, melynek típusa *ArveresObjektum* elemekből álló táblázat. Továbbá írjunk egy konstruktort az *elemekSzama* és az *elem* attribútumok inicializálására, valamint egy nyilvános *hozzaad* nevű metódust, amely egy árverezett objektumot kap paraméterként és hozzáadja azt az *elem* táblázathoz. Ezenkívül írjunk egy *visszaadElem(int pos)* nyilvános metódust, amely a *pos* pozíción levő elemet téríti vissza, és egy *rendez()* metódust, amely az árverezett objektum kezdeti ára szerinti csökkenő sorrendbe rendezi a táblázatot.

c) Vezessünk be egy függvényt, amely egy, a b) pontban megadott *ObjektumokTablazata* típusú táblázatot hoz létre, ami a következő elemeket tartalmazza: az *ArverezettObjektum* egy példányát "Laptop" elnevezéssel és 1000 kezdeti árral, az *ArverezettObjektum* egy példányát "Fulhallgatok" elnevezéssel és 200 kezdeti árral, valamint az *ArverezettObjektum* egy példányát "Auto" elnevezéssel és 8000 kezdeti árral.

d) A program fő függvényében hozzunk létre egy árverezett objektumokból álló táblázatot a c) pontban megadott függvény meghívása által, rendezzük a táblázatot a b) pontban megadott *ObjektumokTablazata* osztály *rendez()* metódusának meghívásával, majd írjuk ki a rendezett táblázatot.

Megjegyzések:

Ne használjunk rendezett tárolókat.

Ne vezessünk be a feladat szövegében megadottakon kívül más metódust.

Ne használjunk előre megadott rendezési műveleteket.

Munkaidő: 3 óra. Minden tétel kötelező.
Minden tétel külön-külön osztályozva lesz (1 és 10 közötti értékkel).
Az írásbeli vizsga végső jegyét a következő képlet adja: $\frac{2}{3} \cdot \frac{JegyI + JegyII + JegyIII}{3} + \frac{JegyIV}{3}$

Soluții geometrie

Remarcăm, înainte de toate, că

$$A = A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right), \quad B = B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right), \quad C = C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right).$$

Ecuația tangentei într-un punct (x_0, y_0) al parabolei se scrie prin dedublare, adică

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Pentru tangenta în A obținem

$$ay = p\left(x + \frac{a^2}{2p}\right)$$

și, analog, pentru tangentele în B și C,

$$by = p\left(x + \frac{b^2}{2p}\right)$$

și

$$cy = p\left(x + \frac{c^2}{2p}\right).$$

(a) Se obține imediat

$$A' = A'\left(\frac{bc}{2p}, \frac{b+c}{2}\right), \quad B' = B'\left(\frac{ca}{2p}, \frac{c+a}{2}\right), \quad C' = C'\left(\frac{ab}{2p}, \frac{a+b}{2}\right).$$

(b) Aria triunghiului ABC este

$$Aria_{ABC} = \frac{1}{4p}\left|\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{4p}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Aria triunghiului $A'B'C'$ este

$$Aria_{A'B'C'} = \frac{1}{8p}\left|\begin{vmatrix} bc & b+c & 1 \\ ca & c+a & 1 \\ ab & a+b & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{8p}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|,$$

de unde rezultatul.

(c) Un calcul simplu ne arată că

$$G = G\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6p}, \frac{a+b+c}{3}\right),$$

$$G' = G'\left(\frac{bc+ca+ab}{6p}, \frac{a+b+c}{3}\right),$$

de unde rezultă imediat rezultatul cerut.

Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Matematică Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă – 27 iunie 2016
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

Algebră

Oficiu 1pt

1. a) Definiția 1.5pt
   b) Se arată că nu este parte stabilă 1.5pt
   c) Demonstrația 1.5pt

2. a) Liniaritatea funcției 1.5pt
   b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ 1.5pt
   c) $[f]_{v,w} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 1.5pt

Analiză

Oficiu 1pt

1. Cu notația $u_n = C_{2n}^n a^n$ are loc $D_n = \dfrac{2a(2n+1)}{n+1}$ 1pt
   $D = \lim_{n\to\infty} D_n = 4a$ 1pt
   Dacă $a < \frac{1}{4}$, atunci seria este convergentă 0.5pt
   Dacă $a > \frac{1}{4}$, atunci seria este divergentă 0.5pt
   Dacă $a = \frac{1}{4}$, atunci $D_n = \dfrac{2n+1}{2n+2}$, deci $R_n = n\left(\dfrac{1}{D_n} - 1\right) = \dfrac{n}{2n+1}$ 1pt
   $R = \lim_{n\to\infty} R_n = \dfrac{1}{2} < 1$, deci seria este divergentă 1pt

2. (a) Cu schimbarea de variabilă $x = e^t$ se obține $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{dt}{(1+t)t}$ 1pt
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = (\ln t - \ln(1+t))\Big|_1^e = 1 - \ln\frac{e+1}{2}$ 1pt
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+e^x} = \int_0^1 \frac{1+x+e^x-(1+e^x)}{1+x+e^x}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{(1+x+e^x)'}{1+x+e^x}\right) dx$ 1pt
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+e^x} = (x - ln(1+x+e^x))\Big|_0^1 = 1 - \ln\frac{e+2}{2}$ 1pt

Geometrie

Oficiu 1pt

a) (i) Determinarea coordonatelor punctelor A,B,C: $A\left(\frac{a^2}{2p},a\right)$, $B\left(\frac{b^2}{2p},b\right)$, $C\left(\frac{c^2}{2p},c\right)$ .. 1pt

(ii) Scrierea ecuațiilor tangentelor în A,B,C: $ay=p\left(x+\frac{a^2}{2p}\right)$, $by=p\left(x+\frac{b^2}{2p}\right)$, $cy=p\left(x+\frac{c^2}{2p}\right)$. 1.5pt

(iii) Determinarea coordonatelor lui A',B',C', ca intersecții ale tangentelor: $A'\left(\frac{bc}{2p},\frac{b+c}{2}\right)$, $B'\left(\frac{ca}{2p},\frac{c+a}{2}\right)$, $C'\left(\frac{ab}{2p},\frac{a+b}{2}\right)$ 2pt

b) (i) Calculul ariei lui ABC: $Aria_{ABC}=\frac{1}{4p}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$ 1pt

(ii) Calculul ariei lui $A'B'C'$: $Aria_{A'B'C'}=\frac{1}{8p}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$ 1pt

(iii) Demonstrarea relației dintre arii 1pt

c) (i) Determinarea coordonatelor lui G: $G\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6p},\frac{a+b+c}{3}\right)$ 0.5pt

(ii) Determinarea coordonatelor lui G': $G'\left(\frac{bc+ca+ab}{6p},\frac{a+b+c}{3}\right)$ 0.5pt

(iii) Demonstrarea faptului că $GG' \parallel Ox$ 0.5pt

Informatică

Oficiu 1pt

a) Definirea clasei *ObiectLicitat* (2pt) din care:

- atribute .... $2\cdot 0.25=0.5$pt
- constructor 0.5pt
- metoda *denumire()* 0.5pt
- metoda *pretDePornire()* 0.5pt

b) Definirea clasei *TablouDeObiecte* (3.5pt) din care:

- atribute .... $2\cdot 0.25=0.5$pt
- constructor 0.5pt
- metoda *sortare()* 1pt
- metoda *adauga()* 0.5pt
- metoda *elementAt()* 0.5pt
- metoda *getNrElemente()* 0.5pt

c) Funcția de creare a tabloului (2pt) din care:

- Signatură corectă, declarare tablou si returnare rezultat 0.5pt

Creare obiecte de tipul *ObiectLicitat* .... $3 \cdot 0.25 = 0.75$pt

Adăugare obiecte in tablou .... $3 \cdot 0.25 = 0.75$pt

d) Program principal (1.5pt) din care:

apel funcție construire tablou 0.5pt

apel funcție sortare 0.5pt

afișare elemente 0.5pt