UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 2019
Specializarea Matematică Informatică

SUBIECTUL I. Algebră

a) Să se demonstreze că mulţimea $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ este un subinel cu unitate în inelul matricilor pătratice $(M_2(\mathbb{Z}_5), +, \cdot)$, unde $+$ şi $\cdot$ reprezintă operaţiile obişnuite. Este $(S, +, \cdot)$ un corp?

b) Demonstraţi că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, sistemul de vectori (v_1, v_2, v_3) cu $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (1, \alpha, 0, 1)$ şi $v_3 = (2, 1, 1, 1)$ din $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ este liniar independent. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = (1, 1, 1, 0)$ aparţine subspaţiului generat de v_1, v_2 şi v_3.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, de termen general $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

a) Să se determine I_2.

b) Să se demonstreze că $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ oricare ar fi $n \geq 3$.

c) Să se demonstreze că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

SUBIECTUL III. Geometrie

a) Să se determine pătratele $ABCD$ cu lungimea laturii de 10 astfel încât centrul de simetrie al pătratului este situat în punctul $P(7, 7)$, vârful A este pe axa Ox, iar vârful B este pe axa Oy.

b) Se dă elipsa $\mathcal{E}$, cu focarele $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$ şi cu axele de simetrie axele de coordonate Ox şi Oy. Ştiind că axa mică a elipsei $\mathcal{E}$ are lungimea de 8, să se decidă dacă elipsa $\mathcal{E}$ trece prin punctele $M(4, 0)$, respectiv $N(0, 4)$.

SUBIECTUL IV. Informatică

Scrieţi un program într-unul din limbajele de programare Python, C++, Java, C# care:

a) (1.50p) Defineşte o clasă **Punct2D** având ca atribute protejate: *denumire* de tip caracter, *coordonataX* de tip număr real, *coordonataY* de tip număr real, iar ca metode publice:

- a.1 Constructor cu parametri pentru iniţializarea tuturor atributelor,
- a.2 Metoda *distanţaPânăLaOrigine* care calculează şi returnează distanţa Euclideana dintre punctul curent şi originea (0, 0) a unui sistem de coordonate 2D,
- a.3 Metoda *getInfo* care returnează următoarea descriere sub forma unui şir de caractere: denumire – distanţaPânăLaOrigine (de ex. pentru punctul A(3, 4) se va afişa ”A – 5”).

b) (3.75p) Defineşte o clasă **ListăDePuncte** având un atribut privat *puncte* de tip tablou cu elemente de tipul **Punct2D**, iar ca metode publice:

- b.1 Constructor fără parametri,

b.2 Metodă accesor de tip *get* pentru atributul puncte,

b.3 Metoda *adaugă(p)* pentru adăugarea unui punct p în tabloul puncte, fiecare punct fiind reţinut o singură dată (două puncte sunt egale dacă au aceleaşi coordonate),

b.4 Metoda *filtruPuncte(limită)*, unde parametrul *limită* este un număr real, care păstrează în lista de puncte doar pe acelea care au distanţa faţă de origine mai mare decât *limită*,

b.5 Metoda *sortare* care sortează alfabetic crescător după atributul *nume* punctele din listă.

c) (0.50p) Defineşte o funcţie *afişare(listă)*, unde parametrul *listă* este de tipul **ListăDePuncte**, care afişează la ieşirea standard punctele din lista *listă*.

d) (0.75p) Defineşte o funcţie *prelucrare1()* care:

d.1 Construieşte o listă de tipul **ListăDePuncte**, formată din următoarele puncte: C(1,2), A(2,3), B(1,2), E(2,4), D(2,5),

d.2 Sortează aceste puncte după denumire (folosind metoda *sortare*),

d.3 Afişează această listă ordonată (folosind funcţia *afişare*).

e) (1.25p) Defineşte o clasă **Punct3D** derivată din clasa **Punct2D** având ca atribut privat: *coordonataZ* de tip număr real, iar ca metode publice:

e.1 Constructor cu parametri pentru iniţializarea tuturor atributelor,

e.2 Metoda *distanţaPânăLaOrigine* care calculează şi returnează distanţa Euclideana dintre punctul curent şi originea (0, 0, 0) a unui sistem de coordonate 3D,

e.3 Metoda *getInfo* care returnează următoarea descriere sub forma unui şir de caractere: denumire – distanţaPânăLaOrigine (de ex. pentru punctul B(3, 4, 5) se va afişa "B – 7.07").

f) (0.50p) Defineşte o funcţie *prelucrare2(val)* care:

f.1 Construieşte o listă de tipul **ListăDePuncte**, formată din următoarele puncte: A(1,2), B(1,2,3), C(1,2), D(3,4,5),

f.2 Determină şi afişează punctele (din lista anterior creată) aflate la o distanţă faţă de origine mai mare decât *val*.

g) (0.25p) Defineşte funcţia principală a programului şi:

g.1 Apelează funcţia *prelucrare1*,

g.2 Apelează funcţia *prelucrare2* cu un parametru a cărui valoare este pătrat perfect.

(0.50p) Stil (comentarii, indentare, nume sugestive, etc.).
(1.00p) Oficiu.

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Media lucrării se calculează ca medie ponderată: $\frac{2}{3}\cdot$ Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică $+\frac{1}{3}\cdot$ Nota de la subiecul de Informatică.
- Pentru fiecare subiect se acorda o notă întreagă de la 1 la 10. Pentru o lucrare, nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 2019
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... 1 p

a)

Luăm $a = b = \widehat{0}$ şi rezultă $0_2 \in S$ 0.5p
Pentru orice $X, Y \in S$ rezultă $X - Y \in S$ 1p
Pentru orice $X, Y \in S$ rezultă $XY \in S$ 1p
Matricea $I_2 \in S$ 0.5p
Rezultă că S este subinel 1p
Matricea $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{3} & \widehat{1} \end{pmatrix} \in S$, dar ea nu este inversabilă 1p

b)

Sistemul (v_1, v_2, v_3) este liniar independent dacă şi numai dacă din $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ rezultă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 1p
Transcrierea condiţitei $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ în formă de sistem şi rezolvarea sistemului 1p
Sistemul $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = v$ este compatibil dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ 1p
Soluţia $\alpha = 0$ 1p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... 1 p

a) Avem

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$ .... 3 p

b) Fie $n \geq 3$ un număr natural arbitrar. Integrând prin părţi, obţinem

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, (-\cos x)' \, \mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$ .... 1 p

Rezultă de aici că

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$ .... 1 p

de unde

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$ .... 1 p

c) Pe baza lui b), se demonstrează (de exemplu prin inducţie) că pentru orice $n \geq 1$ avem

$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$ .... 1 p

Din $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ oricare ar fi $n \geq 1$, inegalitate care poate fi stabilită prin inducţie, se deduce că $\lim_{n\to\infty} I_{2n} = 0$ .... 1 p

Din $0 < I_{2n+1} < I_{2n}$ pentru orice $n \geq 1$, rezultă apoi că $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = 0$ .... 1 p

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... 1 p

a)

$A \in Ox \Rightarrow A(a,0)$, $B \in Oy \Rightarrow B(0,b)$ ....
Din $|AB| = 10$ rezultă $a^2 + b^2 = 100$ .... 0,5 p

.... 0,5p

$|PA| = |PB|$ este jumatatea diagonalei pătratului, deci $|PA| = 5\sqrt{2}$ .... 1 p

$|7-a| = 1$, $|7-b| = 1$ .... 1 p

$a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $b_1 = 6$, $b_2 = 8$ .... 0,5 p

obţinem laturile A_1B_1 şi A_2B_2 cu $A_1(6,0)$, $B_1(0,8)$ resp. $A_2(8,0)$, $B_2(0,6)$. .... 0,5 p

P fiind mijlocul diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$, avem pătratele $A_1B_1C_1D_1$ şi $A_2B_2C_2D_2$ cu $C_1(8,14)$, $D_1(14,6)$, respectiv $C_2(6,14)$, $D_2(14,8)$. .... 2 p

b)

Elipsa este de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... 0,5 p

Axa mică este de lungime 8, deci $b = 4$ .... 0,5 p

$a^2 = b^2 + c^2 = 36$, unde $c = 2\sqrt{5}$ .... 0,5 p

Ecuaţia elipsei: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ .... 0,5 p

Vârful M nu aparţine elipsei .... 0,5 p

Vârful N aparţine elipsei .... 0,5 p

.... 0,5 p

SUBIECTUL IV. Informatică

a) (1.50p) Clasa **Punct2D**

- a.1 Constructor ....
- a.2 Metoda *distanţaPânăLaOrigine* 0.50p
- a.3 Metoda *getInfo* 0.50p

.... 0.50p

b) (3.75p) Clasa **ListăDePuncte**

- b.1 Constructor 0.50p
- b.2 Metoda *get* pentru *puncte* 0.50p
- b.3 Metoda *adaugă(p)* 1.00p

b.4 Metoda *filtruPuncte(limită)* 1.00p

b.5 Metoda *sortare* 0.75p

c) (0.50p) Funcţia *afişare(listă)* 0.50p

d) (0.75p) Funcţia *prelucrare1()*

d.1 Construire listă 0.25p

d.2 Sortare 0.25p

d.3 Afişare 0.25p

e) (1.25p) Clasa **Punct3D**

e.1 Constructor 0.50p

e.2 Metoda *distanţaPânăLaOrigine* 0.50p

e.3 Metoda *getInfo* 0.25p

f) (0.50p) Funcţia *prelucrare2(val)*

f.1 Construire listă 0.25p

f.2 Determinare şi afişare puncte 0.25p

g) (0.25p) Definire funcţie principală

g.1 Apel *prelucrare1* 0.125p

g.2 Apel *prelucrare2* 0.125p

Stil (comentarii, indentare, nume sugestive, etc.) 0.50p

Oficiu 1.00p

Notă.

- Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.