UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 2 iulie 2018
Specializarea Matematică Informatică

SUBIECTUL I. Algebră

a) Demonstraţi că dacă p este un număr prim, atunci

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{p}] = \{a + ib\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

este un subinel în $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Este $(\mathbb{Z}[i\sqrt{p}], +, \cdot)$ corp? (Justificare)

b) Demonstraţi că nu există morfisme de inele unitale $f : (\mathbb{Z}[i\sqrt{3}], +, \cdot) \to (\mathbb{Z}[i\sqrt{5}], +, \cdot)$.

c) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm vectorii

$$v_1 = (2, 1, 1), \quad v_2 = (1, a, 1), \quad v_3 = (1, 1, a),$$

unde $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui a pentru care sistemul (v_1, v_2, v_3) este o bază a lui $\mathbb{R}^3$ şi calculaţi coordonatele vectorului $x = (1, 0, 1)$ în această bază.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Se consideră seria de numere reale

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n(2n+2)} = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots .$$

a) Să se demonstreze că seria este convergentă.

b) Să se demonstreze că pentru orice număr întreg $n \geq 1$ are loc inegalitatea

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} .$$

c) Să se determine suma seriei.

SUBIECTUL III. Geometrie

Se consideră paralelogramul $ABCD$, cu vârfurile $A(2, 1)$, $B(1, -3)$ şi aria de 19 unităţi. Cele două diagonale ale paralelogramului se intersectează pe axa Oy.

a) Determinaţi coordonatele vârfurilor C şi D. Câte soluţii sunt?

b) Calculaţi distanţa de la punctul C la dreapta AB.

SUBIECTUL IV. Informatică

Scrieţi un program într-unul din limbajele de programare Python, C++, Java, C# care:

a) (2p) **Defineşte o clasă** *OfertaDeVacanta* având ca atribute private: *numeHotel* de tip şir de caractere, *nrStele* de tip întreg, *pret* de tip real şi *locatie* de tip şir de caractere, iar ca metode publice: 1) *constructor cu parametri* pentru iniţializarea atributelor definite în clasa *OfertaDeVacanta*, 2) metode accesor de tip *get*, 3) metodă accesor de tip *set* pentru atributul *pret*, 4) metoda *toString* care returnează următoarea reprezentare sub forma de şir de caractere pentru o ofertă de vacanţă: numeHotel locatie nrStele pret.

b) (1.5p) **Defineşte o clasă** *ListaDeOferte* având ca atribute private: 1) *nrOferte* de tip întreg, 2) *oferte* de tip tablou cu elemente de tipul *OfertaDeVacanta*, iar ca metode publice: 1) un constructor fără parametrii, 2) metoda *add* pentru adăugarea unei oferte, specificată ca parametru al metodei, în tabloul *oferte*, 3) metoda *get* care returnează oferta de pe o anumită poziţie, specificată ca parametru al metodei, 4) metoda *size* care returnează numărul de oferte din tablou.

c) (1.5p) **Defineşte o funcţie** care construieşte şi returnează o listă de tipul *ListaDeOferte*, formată din cinci oferte, trei dintre acestea fiind la hotelul DelMar din Costa Brava, iar două la hotelul Cavo Maris din Cipru.

d) (1.5p) **Defineşte o funcţie** *filtruLocatie(lista, criteriu)* unde parametrul *lista* este o listă de oferte de tipul *ListaDeOferte* iar parametrul *criteriu* reprezintă locaţia ofertei după care se realizeaza filtrarea, returnând o nouă listă cu ofertele din locaţia specificată ca şi criteriu.

e) (1.5p) **Defineşte o funcţie** care primeşte ca parametru o listă de oferte de tipul *ListaDeOferte* şi afişează la ieşirea standard lista dată, apelând metoda *toString* din clasa *OfertaDeVacanta*.

f) (1p) Construieşte în **funcţia principală** a programului o listă de oferte de vacanţă (apelând funcţia de la punctul (c)), afişează lista de oferte (apelând funcţia de la punctul (e)), filtrează lista de oferte după locaţie construind o nouă listă doar cu ofertele din "Costa Brava" (apelând funcţia de la punctul (d)), apoi afişeaz lista de oferte filtrată (apelând funcţia de la punctul (e)).

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Media lucrării se calculează ca şi medie ponderată: $\frac{2}{3}\cdot$ Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică $+\frac{1}{3}\cdot$ Nota de la subiecul de Informatică.
- Pentru fiecare subiect se acorda o notă întreagă de la 1 la 10. Pentru o lucrare, nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licență, 2 iulie 2018
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... 1 p

a) $0 = 0 + i0\sqrt{p} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ .... 1 p

$x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}] \;\Rightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ .... 1 p

$x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}] \;\Rightarrow\; xy \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ .... 1 p

Determinarea unui element neinversabil în $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ (de exemplu $2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ și condiția $2y = 1$ implică $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$, contradicție) .... 1 p

b) Condiția $f(1) = 1$ .... 0,5 p

$f(3) = 3,\ f(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ .... 0,5 p

c) Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3 = 3$ .... 0,5 p

(v_1, v_2, v_3) este bază dacă și numai dacă este liniar independent .... 0,5 p

condiția $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .... 1,5 p

condiția $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = x$ .... 0,5 p

soluția $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2(a-1)}, \frac{1}{2(a-1)}\right)$ .... 1 p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... 1 p

a) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n(2n+2)}$

$D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+4}$ .... 1 p

$D = \lim\limits_{n\to\infty} D_n = 1 \;\Rightarrow\;$ criteriul raportului nu decide natura seriei .... 1 p

$R_n = n\left(\dfrac{1}{D_n} - 1\right) = \dfrac{3n}{2n+1}$ .... 1 p

$R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n = \dfrac{3}{2} \;\Rightarrow\;$ seria este convergentă (conform criteriului lui Raabe) .... 1 p

b) Demonstrarea prin inducție a inegalității .... 2 p

c) $\dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k(2k+2)}=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}-\dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)(2k+1)}{2\cdot 4\cdots 2k(2k+2)}$ .... 1 p

$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k(2k+2)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}$ .... 1 p

$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{1}{2}$ (folosind inegalitatea de la b)) .... 1 p

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... 1 p

a) Punctul M de intersectie a diagonalelor are coordonatele $(0,m)$ .... 1 p

Condiţia ca M să fie mijlocul segmentelor $[AC]$ respectiv $[BD]$ .... 0,5 p

Coordonatele vârfului C sunt de forma $(-2,c)$ .... 0,5 p

Coordonatele vârfului D sunt de forma $(-1,d)$ .... 0,5 p

$\mathcal{A}[ABCD]=2\mathcal{A}[ABC]=19\ \Leftrightarrow\ |c+15|=19$ .... 1 p

Coordonatele punctelor $C_1(-2,4),\ C_2(-2,-34)$ .... 1 p

Coordonatele punctelor de intersecţie ale diagonalelor $M_1\left(0,\frac{5}{2}\right),\ M_2\left(0,-\frac{33}{2}\right)$ .... 1 p

Coordonatele punctelor $D_1(-1,8),\ D_2(-1,-30)$ .... 1 p

Două soluţii .... 0,5 p

b) $d(C,AB)=\frac{19}{\sqrt{17}}$ .... 2 p

UNIVERSITATEA BABES-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICA SI INFORMATICA

Proba scrisă a examenului de licență, 2 iulie 2018

Specializarea Matematică Informatică

Barem subiect Informatică

Oficiu – 1p

a) Definirea clasei *OfertaDeVacanta* – 2 din care
   - atribute – 4* 0.2 = 0.8p
   - metode – 6*0.2=1.2p

b) Definirea clasei ListaDeOferte – 1.5 din care
   - atribute – 2*0.25=0.5p
   - metode - 4*0.25 = 1p

c) Construirea listei de oferte – 1.5p din care
   - 0.25p antet metodă
   - 1p=5*0.2 (pt fiecare oferta creata)
   - 0.25p returnare rezultat

d) Funcția de aplicare a filtrării - 1.5p din care
   - 0.5p antet metodă
   - 1p implementare metodă

e) Funcția de afișare listă de oferte - 1.5p din care
   - 0.5p antet metodă
   - 1p implementare metodă

f) Funcția principală - 1p din care
   - 4*0.25 pt fiecare apel