BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Záróvizsga
Írásbeli vizsga, 2018 július 2
Informatikai matematika szak

I. Algebra

a) Bizonyítsuk be, hogy ha p egy prímszám, akkor

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{p}] = \{a + ib\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

részgyűrűje $(\mathbb{C}, +, \cdot)$-nak. $(\mathbb{Z}[i\sqrt{p}], +, \cdot)$ test? (Indoklás)

b) Igazoljuk, hogy nem léteznek $f : (\mathbb{Z}[i\sqrt{3}], +, \cdot) \to (\mathbb{Z}[i\sqrt{5}], +, \cdot)$ homomorfizmusok.

c) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^3$ vektortérben adottak a

$$v_1 = (2, 1, 1), \quad v_2 = (1, a, 1), \quad v_3 = (1, 1, a),$$

vektorok, ahol $a \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg az a értékeit úgy, hogy a (v_1, v_2, v_3) rendszer bázisa legyen $\mathbb{R}^3$-nak és számítsuk ki az $x = (1, 0, 1)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

II. Matematikai analízis

Tekintsük az alábbi valós számsort

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n(2n+2)} = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots.$$

a) Igazoljuk, hogy a sor konvergens.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ természetes szám esetén fennáll az következő egyenlőtlenség

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

c) Határozzuk meg a sor összegét.

III. Mértan

Egy $ABCD$ paralelogramma két csúcsának koordinátái $A(2, 1)$ és $B(1, -3)$, területe pedig 19 egység. A két átló az Oy tengelyen metszi egymást.

a) Határozzuk meg a C és D pontok koordinátáit! Hány megoldás van?

b) Számítsuk ki a C pont AB egyenestől mért távolságát!

IV. Informatika Írjunk programot a Python, C++, Java, C# programozási nyelvek egyikében, amely:

a) (2p) egy *VakaciosAjanlat* nevű osztályt vezet be a következő privát attribútumokkal: *szallodaNeve* karakterlánc típusú, *csillagokSzama* egész típusú, *ar* valós típusú és *hely* karakterlánc típusú. Továbbá, az alábbi publikus metódusokat adjuk meg: 1) *paraméterekkel rendelkező konstruktor* a *VakaciosAjanlat* osztály attribútumainak inicializálására, 2) *getter* típusú hozzáférési metódusok, 3) *setter* típusú hozzáférési metódus az *ar* attribútum beállítására, 4) a *toString* metódus, amely egy vakációs ajánlat esetén az alábbi módon képezett karakterláncot téríti vissza: *szallodaNeve hely csillagokSzama ar*.

b) (1.5p) Adjunk meg egy *AjanlatokListaja* osztályt az alábbi privát attribútumokkal: 1) *ajanlatokSzama* egész típusú, 2) *ajanlatok*, melynek típusa *VakaciosAjanlat* elemekből álló táblázat, és a következő publikus metódusokkal: 1) egy paraméter nélküli *konstruktor*, 2) az *add* metódus amely egy paraméterként megadott ajánlatot ad hozzá az *ajanlatok* táblázathoz, 3) a *get* metódus, amely egy adott, paraméterként specifikált, pozíción lévő ajánlatot térít vissza, 4) a *size* metódus, amely a táblázatbeli ajánlatok számát adja vissza.

c) (1.5p) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *AjanlatokListaja* típusú listát hoz létre és térít vissza öt ajánlattal, amelyből három a *Costa Brava* helység *DelMar* szállodájára, kettő pedig a *Cipruson* található *Cavo Maris* szállodára vonatkozik.

d) (1.5p) Vezessünk be egy *helysegSzures(lista, kriterium)* függvényt, ahol a paraméterként megadott *lista* egy *AjanlatokListaja* típusú ajánlatokból álló lista és a kritérium az ajánlat azon helységét jelenti amely szerint megvalósítjuk a szűrést. A függvény egy új listát térít vissza azokkal az ajánlatokkal, amelyekre a helység megegyezik a kritériummal.

e) (1.5p) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *AjanlatokListaja* típusú listát kap paraméterként és a *VakaciosAjanlat* osztály *toString* metódusának meghívása által kiírja a lista tartalmát.

f) (1p) A program fő függvényében hozzunk létre egy vakációs ajánlatokból álló listát a c) pontban megadott függvény meghívása által, írjuk ki az ajánlatok listáját az e) pontban megadott függvény meghívása által, végezzük el az ajánlatok listájának helység alapján történő szűrését úgy, hogy egy új listát hozzunk létre, amely csak a *Costa Brava* helység ajánlatait tartalmazza a d) pontban megadott függvény meghívásával, végül írjuk ki a szűrés által kapott listát az e) pontban megadott függvény meghívásával.

Megjegyzések.

- Munkaidő: 3 óra.
- Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
- Minden tételre egész jegyet ad 1 és 10 között mindkét javító. Egy dolgozat esetén a legkisebb átmenő jegy 5.
- Az írásbelire adott végleges jegy: $\frac{2}{3}(JegyI + JegyII + JegyIII) + \frac{1}{3}JegyIV$.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licență, 2 iulie 2018
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... 1 p

a) $0 = 0 + i0\sqrt{p} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ .... 1 p

$x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}] \;\Rightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ .... 1 p

$x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}] \;\Rightarrow\; xy \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ .... 1 p

Determinarea unui element neinversabil în $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ (de exemplu $2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ și condiția $2y = 1$ implică $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$, contradicție) .... 1 p

b) Condiția $f(1) = 1$ .... 0,5 p

$f(3) = 3$, $f(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ .... 0,5 p

c) Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3 = 3$ .... 0,5 p

(v_1, v_2, v_3) este bază dacă și numai dacă este liniar independent .... 0,5 p

condiția $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .... 1,5 p

condiția $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = x$ .... 0,5 p

soluția $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2(a-1)}, \frac{1}{2(a-1)}\right)$ .... 1 p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... 1 p

a) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n(2n+2)}$

$D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+4}$ .... 1 p

$D = \lim\limits_{n\to\infty} D_n = 1 \;\Rightarrow\;$ criteriul raportului nu decide natura seriei .... 1 p

$R_n = n\left(\dfrac{1}{D_n} - 1\right) = \dfrac{3n}{2n+1}$ .... 1 p

$R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n = \dfrac{3}{2} \;\Rightarrow\;$ seria este convergentă (conform criteriului lui Raabe) .... 1 p

b) Demonstrarea prin inducție a inegalității .... 2 p

c) $\dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k(2k+2)} = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k} - \dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)(2k+1)}{2\cdot 4\cdots 2k(2k+2)}$ .... 1 p

$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k(2k+2)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}$ .... 1 p

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{2}$ (folosind inegalitatea de la b)) .... 1 p

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... 1 p

a) Punctul M de intersectie a diagonalelor are coordonatele $(0,m)$ .... 1 p

Condiția ca M să fie mijlocul segmentelor $[AC]$ respectiv $[BD]$ .... 0,5 p

Coordonatele vârfului C sunt de forma $(-2,c)$ .... 0,5 p

Coordonatele vârfului D sunt de forma $(-1,d)$ .... 0,5 p

$\mathcal{A}[ABCD] = 2\mathcal{A}[ABC] = 19 \Leftrightarrow |c+15| = 19$ .... 1 p

Coordonatele punctelor $C_1(-2,4)$, $C_2(-2,-34)$ .... 1 p

Coordonatele punctelor de intersecție ale diagonalelor $M_1\left(0,\frac{5}{2}\right)$, $M_2\left(0,-\frac{33}{2}\right)$ .... 1 p

Coordonatele punctelor $D_1(-1,8)$, $D_2(-1,-30)$ .... 1 p

Două soluții .... 0,5 p

b) $d(C,AB) = \frac{19}{\sqrt{17}}$ .... 2 p

UNIVERSITATEA BABES-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICA SI INFORMATICA

Proba scrisă a examenului de licență, 2 iulie 2018

Specializarea Matematică Informatică

Barem subiect Informatică

Oficiu – 1p

a) Definirea clasei *OfertaDeVacanta* – 2 din care
   - atribute – 4* 0.2 = 0.8p
   - metode – 6*0.2=1.2p

b) Definirea clasei ListaDeOferte – 1.5 din care
   - atribute – 2*0.25=0.5p
   - metode - 4*0.25 = 1p

c) Construirea listei de oferte – 1.5p din care
   - 0.25p antet metodă
   - 1p=5*0.2 (pt fiecare oferta creata)
   - 0.25p returnare rezultat

d) Funcția de aplicare a filtrării - 1.5p din care
   - 0.5p antet metodă
   - 1p implementare metodă

e) Funcția de afișare listă de oferte - 1.5p din care
   - 0.5p antet metodă
   - 1p implementare metodă

f) Funcția principală - 1p din care
   - 4*0.25 pt fiecare apel