

UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

EXAMEN DE LICENȚĂ  
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ  
Iulie, 2013

Subiectul I. **Algebră**

- (a) Enunțați și demonstrați teorema fundamentală a aritmeticii.
- (b) Să se arate că numărul  $\sqrt{6}$  este irațional.
- (c) Să se arate că  $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) = \{a + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  este un subcorp al corpului  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  al numerelor reale.

Subiectul II. **Analiză Matematică**

- (a) Definiția funcțiilor primitivabile.
- (b) Enunțați și demonstrați formula integrării prin părți pentru integrale nedefinite.
- (c) Calculați următoarea limită

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{x(1 - \cos x)}.$$

Subiectul III. **Geometrie**

- (a) Parabola: definiție, deducerea ecuației reduse.
- (b) Fie  $ABCD A' B' C' D'$  o prismă patrulateră dreaptă cu bazele pătrate. Punctele  $A, B, D$  și  $A'$  au coordonatele  $(0, 0, 0)$ ,  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 0)$  și  $(0, 0, a\sqrt{2})$ . Fie  $M$  și  $N$  mijloacele segmentelor  $[BB']$  și  $[DD']$ .
  - i. Să se determine ecuațiile planelor  $(AMD)$ ,  $(ANB)$  și  $(A'BD)$ .
  - ii. Să se demonstreze că dreapta de intersecție a planelor  $(AMD)$  și  $(ANB)$  este perpendiculară pe planul  $(A'BD)$ .

**Notă:**

Timp de lucru: 2 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Pentru fiecare subiect se acordă o notă întreagă de la 1 la 10.

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

EXAMEN DE LICENȚĂ, Iulie 2013  
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ  
**BAREM DE CORECTARE**

Subiectul I. **Algebră**

Oficiu .....	1 punct
(a) Enunțul teoremei .....	1,5 puncte
Demonstrația existenței descompunerii (prin inducție matematică) .....	1,5 puncte
• etapa de verificare .....	0,5 puncte
• etapa de demonstrație .....	1 punct
Demonstrația unicității descompunerii .....	1 punct
(b) Presupunerea că $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$ , cu $m, n$ numere naturale nenule relativ prime și deducerea faptului că $2 m$ (sau $3 m$ ) .....	1 punct
Deducerea faptului că $2 n$ (sau $3 n$ ) și a contradicției .....	1 punct
(c) Teorema de caracterizare a subcorpului .....	0,5 puncte
$ \mathbb{Q}(\sqrt{6})  \geq 2$ .....	0,5 puncte
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{6}), z_1 - z_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ și $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ .....	1 punct
$\forall z \in \mathbb{Q}(\sqrt{6}), z \neq 0, z^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ .....	1 punct

Subiectul II. **Analiză Matematică**

Oficiu .....	1 punct
(a) Definiția funcțiilor primitivabile .....	2 puncte
(b) Enunțul formulei .....	1 punct
Derivata produsului .....	1 punct
Demonstrația formulei de integrare prin părți .....	1 punct
(c) Calculul limitei (cu orice metodă corectă) .....	4 puncte

Subiectul III. **Geometrie**

Oficiu .....	1 punct
(a) Definiția parabolei .....	1 punct
Deducerea ecuației .....	2 puncte
(b) i. Ecuația planului ( $AMD$ ) .....	1 punct
Ecuația planului ( $ANB$ ) .....	1 punct
Ecuația planului ( $A'BD$ ) .....	1 punct
ii. Vectorul director al dreptei de intersecție .....	1 punct
Vectorul normal al planului ( $A'BD$ ) .....	1 punct
Concluzia .....	1 punct

**NOTĂ:** Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.