UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs MATE-INFO UBB – 6 aprilie 2019
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ:

1) Problemele de tip grilă din Partea A pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parţială din regulamentul concursului.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete scrise pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

PARTEA A

1. (6 puncte) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + a - 1$, unde $a \in \mathbb{R}$. Ecuaţia $f(x) = 0$ nu are nicio soluţie reală dacă

$\boxed{A}$ $a \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$; $\boxed{B}$ $a \in (-\infty, 1)$; $\boxed{C}$ $a \in (0, 1)$; $\boxed{D}$ $a \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

2. (6 puncte) Numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3})^{19}$ este

$\boxed{A}$ 3; $\boxed{B}$ 6; $\boxed{C}$ 0; $\boxed{D}$ 2.

3. (6 puncte) Fie sistemul de ecuaţii cu coeficienţi reali

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a\,. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{A}$ Există un singur $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă o singură soluţie.

$\boxed{B}$ Există un singur $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă mai multe soluţii.

$\boxed{C}$ Există un singur $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie incompatibil.

$\boxed{D}$ Dacă sistemul are o singură soluţie, atunci y nu depinde de a.

4. (6 puncte) Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului

$$f = X^3 + 2X^2 + 3X + 4 \in \mathbb{R}[X]$$

şi $a = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$, atunci

$\boxed{A}$ $a = \frac{3}{2}$; $\boxed{B}$ $a = -2$; $\boxed{C}$ $a = \frac{4}{3}$; $\boxed{D}$ $a = -\frac{7}{16}$.

5. (6 puncte) Limita $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg} x)$

$\boxed{A}$ este egală cu 1; $\boxed{B}$ este egală cu 2; $\boxed{C}$ este mai mare decât $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{D}$ nu există.

6. (6 puncte) Fie $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x}{x^{2n}+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$\boxed{\text{A}}$ funcţia f este continuă în 0;

$\boxed{\text{B}}$ funcţia f este continuă în -1;

$\boxed{\text{C}}$ limita la stânga a funcţiei f în -1 este egală cu 0;

$\boxed{\text{D}}$ funcţia f nu este continuă în 1.

7. (6 puncte) Fie $f : (-\infty,-1]\cup[1,\infty) \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = (2x-7)\sqrt{x^2-1}$. Atunci

$\boxed{\text{A}}$ f posedă un singur punct de extrem local;

$\boxed{\text{B}}$ f posedă trei puncte de extrem local;

$\boxed{\text{C}}$ f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1]$;

$\boxed{\text{D}}$ f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$.

8. (6 puncte) Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ este

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\pi}{2} - 1$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{2} + 1$; $\boxed{\text{D}}$ 0.

9. (6 puncte) Dacă punctul $A(2,3)$ este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe o dreaptă d, atunci ecuaţia dreptei d este

$\boxed{\text{A}}$ $2x-3y+5=0$; $\boxed{\text{B}}$ $3x-2y-17=0$; $\boxed{\text{C}}$ $3x+2y-13=0$; $\boxed{\text{D}}$ $2x+3y-13=0$.

10. (6 puncte) Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$ este

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\frac{k\pi}{4}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle| k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{C}}$ $\left\{\frac{k\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{D}}$ $\left\{\frac{k\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

PARTEA B

1. (10 puncte) Se consideră inelul $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. Pentru orice $x = a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, se notează $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$. Fie funcţia $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}$ definită prin $f(x) = x\cdot\bar{x}$.

(a) Să se arate că $f(x_1\cdot x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$ pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(b) Să se arate că dacă $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este inversabil, atunci $f(x)\in\{-1,1\}$.

(c) Este inelul $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ corp? Justificare.

2. (10 puncte) Să se determine asimptotele funcţiei $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \frac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. (10 puncte) Într-un patrulater convex $ABCD$ fie E şi F mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi respectiv $[BD]$. Dacă $4\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, atunci să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3,5 ore.

Răspunsuri şi soluţii

PARTEA A

Răspunsuri la probleme:

1. $\boxed{\text{A}}\,\boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{A}}$; **3.** $\boxed{\text{B}}\,\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{D}}$; **5.** $\boxed{\text{B}}\,\boxed{\text{C}}$;

6. $\boxed{\text{A}}\,\boxed{\text{C}}\,\boxed{\text{D}}$; **7.** $\boxed{\text{B}}\,\boxed{\text{C}}$; **8.** $\boxed{\text{A}}$; **9.** $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{C}}$.

Soluţii la probleme:

1. Ecuaţia $f(x) = 0$ nu are nicio soluţie reală $\Leftrightarrow \Delta = 4(a-1)^2 - 4(a-1) = 4(a-1)(a-2) < 0$ $\Leftrightarrow a \in (1, 2)$.

2. Termenul general al dezvoltării este

$$T_{k+1} = C_{19}^k \sqrt{3}^{19-k} \sqrt[3]{3}^k = C_{19}^k 3^{\frac{19-k}{2}} 3^{\frac{k}{3}}, \quad k \in \{0, \ldots, 19\}.$$

Atunci T_{k+1} este raţional $\Leftrightarrow k \in \{0, \ldots, 19\}$, $3|k$ şi $2|(19-k) \Leftrightarrow k \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ şi $2|(19-k) \Leftrightarrow k \in \{3, 9, 15\}$. Deci numărul termenilor raţionali ai dezvoltării este 3.

3. Notând cu A matricea sistemului, avem $\det(A) = (a-1)^2$. Deci $\det(A) = 0$ dacă şi numai dacă $a = 1$. Distingem următoarele două cazuri:

- Dacă $a = 1$, atunci sistemul este echivalent cu ecuaţia $x + y + z = 1$, deci are o infinitate de soluţii.
- Dacă $a \neq 1$, atunci sistemul are o singură soluţie. Avem $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2$, deci $y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = -1$ nu depinde de a.

4. Din relaţiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$ şi $x_1x_2x_3 = -4$. Deci

$$\begin{aligned} a = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} &= \frac{x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2}{(x_1x_2x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^2}{(x_1x_2x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{(x_1x_2x_3)^2} = -\frac{7}{16}. \end{aligned}$$

5. Aplicând regula lui l'Hôpital, avem

$$\lim_{x\to\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg} x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$$

6. Dacă $x \in (-1, 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, deci $f(x) = x$. Evident $f(1) = 1$. Dacă $|x| > 1$, atunci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n + x}{x^{2n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{x}{x^n}}{x^n\left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)} = 0.$$

Prin urmare

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < -1 \\ x, \text{ dacă } -1 < x \leq 1 \\ 0, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$$

7. Funcţia f este continuă pe $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ şi derivabilă pe $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ avem

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x(2x - 7)}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{4x^2 - 7x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}}\ .$$

Rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$ sunt $-1/4$ şi 2, iar tabelul care sintetizează variaţia lui f este prezentat mai jos.

x	$-\infty$			-1			1			2			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\vert$	$\vert$	0	$\searrow$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Din tabel rezultă că -1 şi 1 sunt puncte de maxim local pentru f, în timp ce 2 este punct de minim local pentru f. De asemenea, din tabel rezultă că f este strict crescătoare pe $(-\infty, -1]$, dar nu este strict crescătoare pe $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$.

8. Avem

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin x)' \ln(1 + \cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sin x \ln(1 + \cos x)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x)\,\mathrm{d}x = (x - \sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

9. Panta dreptei OA este $m_{OA} = \frac{3}{2}$, deci panta dreptei d este $m_d = \frac{-1}{m_{OA}} = -\frac{2}{3}$. Astfel ecuaţia dreptei d este $d : y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$, adică $d : 2x + 3y - 13 = 0$.

10. *Soluţia 1.* Avem:

$$\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x \Leftrightarrow \cos^3 x - \sin^3 x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) = \cos x - \sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x) = \cos x - \sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \cos x \sin x = 0.$$

Cazul I. $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.
Cazul II. $\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$.
Deci mulţimea soluţiilor este $M = \{\frac{k\pi}{2} \big| k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + k\pi \big| k \in \mathbb{Z}\}$.
Soluţia 2. Avem:

$$\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x \Leftrightarrow \sin x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x \cos^2 x = \cos x \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x \cos x(\cos x - \sin x) = 0.$$

Mulţimea soluţiilor se obţine ca mai sus.

PARTEA B

Soluţii la probleme şi barem:

1. (a) (3 puncte) Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, avem

$$f(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x_1 \cdot x_2}) = (x_1 \cdot x_2) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) = (x_1 \cdot \overline{x_1}) \cdot (x_2 \cdot \overline{x_2}) = f(x_1) \cdot f(x_2),$$

deoarece înmulţirea elementelor din $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este comutativă.

(b) (1 punct) Deoarece $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este inversabil, există $x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ astfel ca $x \cdot x' = 1$.

(2 puncte) Deci $f(x) \cdot f(x') = f(x \cdot x') = f(1) = 1$ conform pct. (a).

(1 punct) Deoarece $f(x) \in \mathbb{Z}$, rezultă că $f(x) \in \{-1, 1\}$.

(c) (3 puncte) De exemplu, fie $x = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Atunci $x \neq 0$ nu este inversabil conform pct. (b), deoarece $f(x) = 2 \notin \{-1, 1\}$. Deci $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ nu este corp.

2. (0,5 puncte) Deoarece funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, ea nu are asimptote verticale.

(0,5+0,5 puncte) Avem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$

deci f nu are asimptote orizontale.

Avem

$$\textbf{(1,5 puncte)} \quad m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2 puncte)} \quad n_1 &= \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \lim_{x\to\infty}\left(x-3-\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+9-x^2-1}{x-3+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-6+\frac{8}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = -3.
\end{aligned}$$

(1 punct) Prin urmare, dreapta $y = x - 3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f.

De asemenea,

$$\textbf{(1 punct)} \quad m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}{-x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1,$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2 puncte)} \quad n_2 &= \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \lim_{x\to\infty}\left(x-3+\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+9-x^2-1}{x-3-\sqrt{x^2+1}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-6+\frac{8}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = 3.
\end{aligned}$$

(1 punct) Prin urmare, dreapta $y = -x + 3$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul lui f.

Observaţie. Stabilirea existenţei asimptotelor oblice urmată de concluzia că f nu are asimptote orizontale atrage obţinerea punctului aferent calculului limitelor lui f la $\pm\infty$.

3. Punctul F este mijlocul segmentului $[BD]$, deci $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED})$ **(2 puncte)**. Analog, punctul E fiind mijlocul lui $[AC]$ avem că $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ **(2 puncte)** şi $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$ **(2 puncte)**.

Astfel

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}). \quad \textbf{(1 punct)}$$

Pe de altă parte conform ipotezei

$$4\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Deci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ **(1 punct)**, adică $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram **(2 puncte)**.