UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs MATE-INFO UBB, 25 martie 2018
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ:

1) Problemele tip grilă (Partea A) pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte. Acestea trebuie indicate de candidat pe foaia de concurs. Obţinerea punctajului aferent problemei este condiţionată de identificarea tuturor variantelor de răspuns corecte şi numai a acelora.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

PARTEA A

1. (5 puncte) Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x^2+20x-25$ are:

$\boxed{A}$ un maxim strict mai mic ca 0; $\boxed{B}$ un minim negativ; $\boxed{C}$ un maxim egal cu 0; $\boxed{D}$ un minim egal cu 0; $\boxed{E}$ un maxim strict mai mare ca 0.

2. (5 puncte) Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{A}$ funcţia f admite o asimptotă oblică; $\boxed{B}$ funcţia f admite asimptotă orizontală atât spre $+\infty$ cât şi spre $-\infty$; $\boxed{C}$ funcţia f nu are nici o asimptotă verticală; $\boxed{D}$ $-1\le f(x)\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$; $\boxed{E}$ f este o funcţie monotonă pe $\mathbb{R}$.

3. (5 puncte) Dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci numărul complex $a+bi$ este nenul dacă şi numai dacă:

$\boxed{A}$ $a\cdot b\neq 0$; $\boxed{B}$ $a^2+b^2\neq 0$; $\boxed{C}$ numerele a şi b nu sunt simultan nule; $\boxed{D}$ $a=b\neq 0$; $\boxed{E}$ $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

4. (5 puncte) Dacă $\sin\alpha+\sin\beta=a$ şi $\cos\alpha+\cos\beta=b$, atunci

$\boxed{A}$ $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; $\boxed{B}$ $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\sqrt{a^2-b^2}$; $\boxed{C}$ $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$;
$\boxed{D}$ $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$; $\boxed{E}$ $\cos(\alpha+\beta)=a^2+b^2-2$.

5. (5 puncte) Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{n}\right)^n$

$\boxed{A}$ nu există; $\boxed{B}$ este $\dfrac{e}{2}$; $\boxed{C}$ este e^2; $\boxed{D}$ este $\sqrt{e}$; $\boxed{E}$ este $2e$.

6. (5 puncte) Se consideră punctele $A(0,0), B(21,0), C(0,21)$. Câte puncte cu ambele coordonate întregi sunt în interiorul triunghiului ABC?

$\boxed{A}$ 242; $\boxed{B}$ 190; $\boxed{C}$ 231; $\boxed{D}$ 210; $\boxed{E}$ 284.

PARTEA B

1. Fie $G=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid \det A\neq 0\}$ şi $H=\left\{\left(\begin{array}{cc}1 & a\\ 0 & 1\end{array}\right)\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$. Arătaţi că:

a) (4 puncte) G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor;

b) (5 puncte) $(G,\cdot)$ este grup (unde cu $\cdot$ s-a notat operaţia indusă de înmulţirea matricelor pe G);

c) (8 puncte) $(H,\cdot)$ este un subgrup al lui $(G,\cdot)$ şi este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{R},+)$ al numerelor reale.

d) (8 puncte) Fie $A=\left(\begin{array}{cc}1 & a\\ 0 & 1\end{array}\right)\in H$ şi $n\in\mathbb{Z}$ un număr întreg. Să se calculeze A^n.

2. a) (5 puncte) Fie ABC un triunghi oarecare. Demonstraţi că pentru orice punct M din planul triunghiului avem relaţia

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

b) (10 puncte) Rezolvaţi ecuaţia

$$4^{\sin 2x} + 4^{3-\sin 2x} = 65, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) (6 puncte) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f.
b) (7 puncte) Determinaţi primitivele funcţiei f.
c) (7 puncte) Calculaţi $\int_0^2 f(x)\, dx$.

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

BAREM DE CORECTARE

PARTEA A

1. $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p
2. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ .... 5 p
3. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p
4. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{D}}$ .... 5 p
5. $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p
6. $\boxed{\text{B}}$ .... 5 p

PARTEA B

1. a) $A, B \in G \Leftrightarrow \det A \neq 0 \neq \det B \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$
$\Rightarrow AB \in G$ .... 4 p

b) Ştiind că înmulţirea matricelor e asociativă, din proprietatea precedentă rezultă
$\forall A, B, C \in G \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (în G) .... 1 p

Cum $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ are determinantul 1, se deduce că $I_2 \in G$ şi este element unitate în $(G, \cdot)$ ... 2 p

Pentru orice $A \in G$, $\det A \neq 0$, deci există A^{-1} şi $1 = \det I_2 = \det A \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0$, prin urmare există $A^{-1} \in G$ astfel încât $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$, ceea ce completează demonstraţia faptului că G este grup .... 2 p

c) Cum $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \forall a \in \mathbb{R}$, H este o submulţime nevidă a lui G ($I_2 \in H$), ... 1 p

care este parte stabilă în raport cu $\cdot$ deoarece
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (1)$ .... 1 p

şi pentru orice $a \in \mathbb{R}$ inversa matricei $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ .... 2 p

Funcţia $f : \mathbb{R} \to H$, $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este, conform (1), morfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(H, \cdot)$ .... 2 p

Scriind definiţiile injectivităţii şi surjectivităţii, rezultă imediat că f este bijectivă .... 2 p

d) Intuirea faptului că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N}$ .... 2 p

Demonstraţia prin inducţie a faptului că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$ .... 4 p

Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ atunci $A^{-m} = (A^{-1})^m = \begin{pmatrix} 1 & m(-a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-m)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ceea ce completează demonstraţia. .... 2 p

2. a) (5 puncte)

(i) Descompunerea lui $\overrightarrow{CM}$ .... 1 p

(ii) Descompunerea lui $\overrightarrow{MB}$ .... 1 p

(iii) Descompunerea lui $\overrightarrow{BC}$ .... 1 p

(iv) Înlocuirea în formulă .... 1 p

(v) Efectuarea calculelor şi rezultatul final .... 1 p

2. b) (10 puncte)

(i) Notaţia $4^{\sin 2x} = t$ .... 2 p

(ii) Deducerea ecuaţiei de gradul al doilea în expresia cerută .... 2 p

(iii) Rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea .... 3 p

(iv) Eliminarea soluţiei $t = 3$ .... 1 p

(v) Soluţia finală .... 2 p

3. a) (6 puncte)

(i) Determinarea punctului $x_1 = 0$ .... 2 p

(ii) Demonstrarea faptului că x_1 este maxim local .... 2 p

(iii) Studiul punctului $x_2 = 1$ .... 2 p

3. b) (7 puncte)

(i) Determinarea primitivelor pe intervalele $(-\infty, 1)$ şi $(1, \infty)$ .... 4 p

(ii) Determinarea relaţiei între cele două constante .... 2 p

(iii) Forma finală a primitivelor .... 1 p

3. c) (7 puncte)

(i) Calculul valorilor $F(0)$ şi $F(2)$ .... 4 p

(ii) Folosirea formulei Newton-Leibniz .... 2 p

(iii) Rezultatul final .... 1 p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Răspunsuri şi soluţii

PARTEA A

1. $\boxed{\text{C}}$; **2.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **3.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **4.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{D}}$; **5.** $\boxed{\text{C}}$; **6.** $\boxed{\text{B}}$.

PARTEA B

1. a) $A, B \in G$, deci $\det A \neq 0 \neq \det B$ şi astfel $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$. În consecinţă $AB \in G$.

b) Ştiind că înmulţirea matricelor e asociativă, din proprietatea deja demonstrată rezultă $\forall A, B, C \in G \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (în G). Cum $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ are determinantul 1, se deduce că $I_2 \in G$. Astfel I_2 este element unitate şi în $(G, \cdot)$. Pentru orice $A \in G$, din faptul că $\det A \neq 0$ rezultă că există A^{-1}, iar din relaţia $1 = \det I_2 = \det A \cdot \det(A^{-1})$ deducem $\det(A^{-1}) \neq 0$, prin urmare $A^{-1} \in G$ şi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$, deci $(G, \cdot)$ este grup.

c) Cum $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, H este o submulţime nevidă a lui G ($I_2 \in H$). Pe de altă parte $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, deci H este parte stabilă în raport cu operaţia "$\cdot$". Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ inversa matricei $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, deci H este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$. Mai mult funcţia $f : \mathbb{R} \to H$, $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este morfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(H, \cdot)$ deoarece

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

f este injectivă şi surjectivă, deci f este o bijecţie. Astfel $(\mathbb{R}, +)$ este izomorf cu $(H, \cdot)$.

d) Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice că

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $n = 1$ proprietatea este adevărată. Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ şi $A^m = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci

$$A^{m+1} = A^m \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (m+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci relaţia este adevărată şi pentru $m + 1$. Astfel pe baza principiului inducţiei matematice relaţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $m \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = \begin{pmatrix} 1 & m(-a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-m)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru $m = 0$ avem $A^0 = I_2$, deci

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Observaţie: O altă abordare pentru c) şi d) ar putea fi: funcţia $F : \mathbb{R} \to G$, $F(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este, conform (1), morfism injectiv de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(G, \cdot)$ şi $F(\mathbb{R}) = H$. Rezultă că H e subgrup în G, că $(\mathbb{R}, +) \simeq (H, \cdot)$ şi că $F(na) = [F(a)]^n$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, adică are loc (2).

2. a) Avem:

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM},$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

prin urmare

$$S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right) + \\ + \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) + \overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right).$$

După desfacerea parantezelor şi folosirea comutativităţii produsului scalar obţinem $S = 0$.

b) Cu notaţia
$$t = 4^{\sin 2x}$$
ecuaţia devine
$$t + \frac{64}{t} = 65$$
sau
$$t^2 - 65t + 64 = 0.$$
Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $1 = 4^0$ şi $64 = 4^3$.

Suntem, astfel, conduşi la soluţiile
$$\sin 2x = 3$$
care nu convine (deoarece $\sin 2x \leq 1$), şi
$$\sin 2x = 0,$$
care admite soluţiile $x \in \left\{ \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. a) Pe intervalul $(-\infty, 1)$ funcţia este $f(x) = -x^2$, deci pe acest interval $f'(x) = -2x$. Astfel din ecuaţia $f'(x) = 0$ deducem $x_1 = 0$ şi din semnul derivatei ($f'(x) > 0$ pentru $x < 0$ şi $f'(x) < 0$ pentru $0 < x < 1$) rezultă că $x_1 = 0$ este un punct de extrem local pentru f. f fiind derivabilă pe $(-\infty, 1)$ şi ecuaţia $f'(x) = 0$ neavând alte soluţii, x_1 este singurul punct de extrem local al funcţiei situat în intervalul $(-\infty, 1)$. Pe intervalul $(1, \infty)$ funcţia este strict crescătoare (fiind de gradul unu şi având coeficientul termenului dominant pozitiv), deci pe acest interval nu are puncte de extrem local. Rămâne de studiat punctul $x_2 = 1$ în care funcţia nu este derivabilă. $f(1) = -1$ şi pentru $x \in (-1, 1)$ $-x^2 > -1$, deci
$$f(x) > f(1), \ \forall x \in (-1, 1).$$
Pe de altă parte dacă $x \geq 1$, atunci $x - 2 \geq -1$, deci
$$f(x) \geq f(1), \ \forall x \in [1, \infty).$$
Astfel
$$f(x) \geq f(1), \ \forall x \in (-1, \infty),$$
adică x_2 este punct de minim local.

b) Folosind consecinţele teoremei lui Lagrange pe intervalele $(-\infty, 1)$ şi $(1, \infty)$, orice primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a lui f are forma
$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + c_1, & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$
F fiind derivabilă este şi continuă, deci
$$F(1) = -\frac{1}{3} + c_1 = -\frac{3}{2} + c_2.$$

Astfel primitivele lui f au forma

$$F(x) = \mathcal{C} + \begin{cases} -\frac{x^3}{3}, & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{7}{6}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

c) Folosim formula Newton-Leibniz:

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 2 - 4 + \frac{7}{6} - 0 = -\frac{5}{6}.$$

Observaţie: Integrala poate fi calculată şi fără forma exactă a primitivei dacă o descompunem în două:

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^2 f(x)\,dx.$$