UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

# Concurs MATE-INFO UBB, 1 aprilie 2017
## Proba scrisă la MATEMATICĂ

**SUBIECTUL I (30 puncte)**

1) (15 puncte) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Discutaţi în funcţie de $a$ dacă există matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ cu elemente din $\mathbb{R}$ pentru care $AX = B$.

În caz afirmativ, determinaţi matricele $X$.

2) (10 puncte) Pentru $a, b \in \mathbb{Q}$ considerăm funcţia $f_{a,b} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f_{a,b}(x) = ax + b$. Determinaţi mulţimea tuturor perechilor $(a, b)$ pentru care $f_{a,b}$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{Q}, +)$ la el însuşi.

3) (5 puncte) Rezolvaţi ecuaţia $\widehat{4}x + \widehat{8} = \widehat{0}$ în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

**SUBIECTUL II (30 puncte)**

1) (20 puncte) Se dă punctul $P(0, 1)$ şi dreptele $d_1 : x - 3y + 10 = 0$ şi $d_2 : 2x + y - 8 = 0$. Prin $P$ se duce o dreaptă $d$ care intersectează $d_1$ într-un punct $A$ şi $d_2$ într-un punct $B$. Determinaţi ecuaţia dreptei $d$ pentru care punctul $P$ este mijlocul segmentului $[AB]$.

2) (10 puncte) Rezolvaţi ecuaţia

$$\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x.$$

**SUBIECTUL III (30 puncte)**

1) Considerăm funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, definită prin relaţia

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x},$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f$.
a) (5 puncte) Determinaţi mulţimea $D$.
b) (5 puncte) Calculaţi $f'$.
c) (5 puncte) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei $f$.
d) (5 puncte) Demonstraţi că

$$\frac{\sqrt{2016}}{2015} > \frac{\sqrt{2017}}{2016}.$$

2) (10 puncte) Calculaţi $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k+n}$.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

**Concurs MATE-INFO UBB, 1 aprilie 2017**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

# Barem

**SUBIECTUL I (30 puncte)**

1) $AX = B \Leftrightarrow (S) \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=a \\ 4x+9y+z=a^2 \\ 8x+27y+z=a^3 \end{cases}$ ........ 2p

Cum $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $(S)$ e compatibil $\Leftrightarrow d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & a \\ 4 & 9 & 1 & a^2 \\ 8 & 27 & 1 & a^3 \end{vmatrix} = 0$ ........ 1p

$d = 2(a-1)(a-2)(a-3) = 0 \Leftrightarrow a \in \{1,2,3\}$ ........ 3p

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ sistemul $(S)$ este incompatibil, deci nu există $X$ ........ 2p

Dacă $a \in \{1,2,3\}$ sistemul $(S)$ este compatibil determinat ........ 1p

echivalent cu sistemul $(S') \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=a \\ 4x+9y+z=a^2 \end{cases}$ ........ 1p

$x = -(1-a)(3-a),\ y = \dfrac{1}{2}(1-a)(2-a),\ z = \dfrac{1}{2}(2-a)(3-a)$ ........ 3p

$a = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ........ 2p

*Observaţie:* Ultimele 6 puncte din barem pot fi redistribuite în cazul în care se tratează separat fiecare caz de compatibilitate, acordându-se 2 puncte pentru fiecare caz.

2) $f_{a,b}$ endomorfism al lui $(\mathbb{Q},+) \Rightarrow f_{a,b}(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ ........ 2p

$\forall a \in \mathbb{Q}, \forall x, y \in \mathbb{Q},\ f_{a,b}(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f_{a,b}(x) + f_{a,b}(y)$, prin urmare,
$f_{a,b}$ morfism $\Leftrightarrow b = 0$ ........ 3p

$f_{a,0}$ bijecţie $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q}$ unic determinat astfel încât $y = f_{a,b}(x) = ax$
$\Leftrightarrow a \neq 0$ şi $x = \dfrac{y}{a}$ (unica soluţie a ecuaţiei $ax = y$) ........ 4p

*Observaţie:* Dacă se verifică separat injectivitatea şi surjectivitatea lui $f_{a,0}$ se acordă câte 2 puncte pentru analiza corectă a fiecăreia dintre ele şi obţinerea condiţiei $a \neq 0$.

Mulţimea căutată este $\{(a,0) \mid a \in \mathbb{Q}^*\}$ ........ 1p

3) $\widehat{4}x + \widehat{8} = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{4}(x + \widehat{2}) = \widehat{0}$.
Folosind tabelul operaţiei (tabla înmulţirii) deducem $x + \widehat{2} \in \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}\}$ ........ 3p
$\Leftrightarrow x \in \{\widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{7}, \widehat{10}\}$ ........ 2p

**SUBIECTUL II (30 puncte)**

**Problema 1 (prima soluţie)**

forma generală $(d) : y = kx + 1$ ........ 2.5p
punctele $A$ şi $B$ în funcţie de $k$ ........ 4p
condiţia $x_A + x_B = 2x_P (= 0)$ ........ 3p
determinarea pantei $k$ ........ 4p
verificarea faptului că $P$ e mijlocul lui $[AB]$ ........ 3p
ecuaţia dreptei $(d) : x + 4y - 4 = 0$ ........ 3p
analiza cazului când ecuaţia dreptei $d$ este $x = 0$ ........ 0.5p

**Problema 1 (a doua soluţie)**

coordonatele punctului $Q$ ........ 4p
determinarea vectorului $\overrightarrow{QP}$ ........ 2p
coordonatele lui $A$ şi $B$ în funcţie de parametri ........ 4p
determinarea vectorilor $\overrightarrow{QA}$ şi $\overrightarrow{QB}$ ........ 3p
condiţia $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QP}$ ........ 2p
determinarea coordonatelor lui $A$ şi $B$ ........ 3p
ecuaţia dreptei $AB$, $(d) : x + 4y - 4 = 0$ ........ 2p

**Problema 2**

membrul I al ecuaţiei poate fi scris $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = \cos x$ ........ 3p
scrierea ecuaţiei sub forma $\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$ ........ 3p
scrierea soluţiilor ecuaţiei $\cos x = 0$ ........ 2p
scrierea soluţiilor ecuaţiei $\cos x = \dfrac{1}{2}$ ........ 2p

**SUBIECTUL III (30 puncte)**

1) $x + 1 \geq 0$ ........ 2p
$x \neq 0$ ........ 2p
$D = [-1, +\infty) \setminus \{0\}$ ........ 1p
2) $f'(x) = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$. ........ 5p
3) $f'(x) < 0, \forall x \in D$ ........ 3p
$f$ descrescătoare pe $[-1, 0)$ ........ 1p
$f$ descrescătoare pe $(0, +\infty)$ ........ 1p
4) $f(2015) = \frac{\sqrt{2016}}{2015}$ ........ 1p
$f(2016) = \frac{\sqrt{2017}}{2016}$ ........ 1p
$f$ descrescătoare, $2015 < 2016 \Rightarrow f(2015) > f(2016)$ ........ 3p
5) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx$ ........ 2p
$\int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$ ........ 2p
$\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$ ........ 2p
$L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$ ........ 1p
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ ........ 2p
$L = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$ ........ 1p

**NOTĂ:** Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

**Concurs MATE-INFO UBB, 1 aprilie 2017**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

# Soluţii

**SUBIECTUL I (30 puncte)**

A se vedea baremul.

**SUBIECTUL II (30 puncte)**

1. Soluţia 1. Orice dreaptă care trece prin punctul $P$ are ecuaţia de forma $y-1=kx$ sau $x=0$. Dreapta de ecuaţie $x=0$ intersectează dreptele $d_1$ şi $d_2$ în punctele $A(0,\frac{10}{3})$ şi $B(0,8)$. Mijlocul acestui segment $[AB]$ are coordonatele $M(0,\frac{34}{3})$, deci nu coincide cu $P$. Astfel putem presupune că dreapta căutată are ecuaţia

$$(d): y = kx + 1,$$

deci ceea ce trebuie să determinăm este panta $k$ a dreptei $d$. Derterminăm mai întâi punctele de intersecţie ale dreptei $d$ cu dreptele date. Astfel, coordonatele lui $A$ sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} y = kx + 1, \\ x - 3y + 10 = 0, \end{cases}$$

de unde

$$x - 3xk - 3 + 10 = 0,$$

adică

$$x_A = \frac{7}{3k-1}$$

şi

$$y_A = \frac{10k-1}{3k-1}.$$

Analog, coordonatele lui $B$ sunt date de sistemul

$$\begin{cases} y = kx + 1, \\ 2x + y - 8 = 0, \end{cases}$$

care ne conduce la

$$2x + kx + 1 - 8 = 0,$$

adică

$$x_B = \frac{7}{k+2}$$

şi

$$y_B = \frac{8k+2}{k+2};$$

Abscisa mijlocului segmentului $AB$ este

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3k-1} + \frac{7}{k+2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{4k+1}{(3k-1)(k+2)}.$$

Dar noi vrem ca această abscisă să coincidă cu abscisa punctului $P$, adică $x_0 = 0$. De aici obţinem $k = -\frac{1}{4}$. Cu această valoare a lui $k$, obţinem

$$A = A(-4, 2), B = B(4, 0)$$

şi se verifică imediat că $P$ este mijlocul segmentului $AB$. Ecuaţia dreptei care trece prin $P$ şi are panta $-1/4$ este

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

sau

$$x + 4y - 4 = 0.$$

Soluţia 2. Ideea soluţiei este să determinăm, mai întâi, punctul de intersecţie $Q$ al dreptelor date. Alegem apoi un punct (în prima fază, oarecare) $A$ pe $d_1$ şi un punct $B$ pe $d_2$. Atunci $P$ este mijlocul lui $AB$ dacă şi numai dacă $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}$. Dreapta pe care o căutăm va fi dreapta $AB$.

Coordonatele punctului $Q$ sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} x - 3y + 10 = 0, \\ 2x + y - 8 = 0, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la punctul $Q(2, 4)$. Aşadar, componentele vectorului $\overrightarrow{QP}$ vor fi $(-2, -3)$.

Fie acum $A$ un punct oarecare de pe dreapta $d_1$. Legătura dintre coordonatele lui $A$ vor fi, atunci,

$$x_A - 3y_A + 10 = 0.$$

Dacă notăm $y_A = t$, atunci $x_A = 3t - 10$, deci $A = (3t - 10, t)$, deci vectorul care uneşte pe $Q$ cu $A$ va fi $\overrightarrow{QA}(3t - 12, t - 4)$.

Analog, fie $B$ un punct de pe dreapta $d_2$, adică

$$2x_B + y_B - 8 = 0.$$

Atunci, dacă punem $x_B = s$, obţinem $B(s, -2s + 8)$, deci vectorul de poziţie al lui $B$ relativ la $Q$ este $\overrightarrow{QB}(s - 2, 4 - 2s)$.

Prin urmare, ecuaţia

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QP}$$

este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 3t + s = 10, \\ t - 2s = -6. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este $t = 2, s = 4$, ceea ce ne conduce la punctele $A(-4, 2), B(4, 0)$. Ecuaţia dreptei $d$ este ecuaţia dreptei $AB$, adică

$$\frac{x + 4}{4 + 4} = \frac{y - 2}{0 - 2}$$

sau

$$x + 4y - 4 = 0.$$

2. Ecuaţia se poate scrie

$$\sin(x + 30°) + \sin(90° - x - 60°) = 1 + \cos 2x$$

sau

$$\sin(x + 30°) + \sin(30° - x) = 1 + \cos 2x,$$

de unde

$$2\sin\frac{x + 30° + 30° - x}{2} \cdot \cos\frac{x + 30° - 30° + x}{2} = 1 + \cos 2x$$

sau

$$2\sin 30^\circ \cdot \cos x = 1 + \cos 2x$$

sau, încă,

$$\cos x = 1 + \cos 2x.$$

Această ecuaţie se poate scrie

$$\cos x = 1 + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x.$$

Avem, prin urmare, de rezolvat ecuaţia

$$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0.$$

Obţinem, prin urmare:

1. $\cos x = 0$, ceea ce ne conduce la soluţia
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$
2. $\cos x = \dfrac{1}{2}$, ceea ce ne conduce la soluţia
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

În final mulţimea soluţiilor ecuaţiei iniţiale este

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**SUBIECTUL III (30 puncte)** 1. Condiţia de existenţă a redicalului este $x + 1 \geq 0$ şi condiţia de existenţă fracţiei este $x \neq 0$. Astfel domeniul maxim de definiţie este $D = [-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

2. Folosim regula de derivare a fracţiilor, derivata funcţiei radical şi regula de derivare a funcţiei compuse:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1}}{x^2} = \frac{\frac{x-2x-2}{2\sqrt{x+1}}}{x^2} = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}.$$

3. Dacă $x \in D$, atunci $x + 2 > x + 1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ şi $\sqrt{x+1} \geq 0$. Astfel $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in D$, deci $f$ este strict descrescătoare pe intervalele $[-1, 0)$ şi $(0, +\infty)$.

4. $f$ fiind descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$ putem scrie

$$2015 < 2016 \Rightarrow f(2015) > f(2016).$$

Pe de altă parte $f(2015) = \frac{\sqrt{2016}}{2015}$ şi $f(2016) = \frac{\sqrt{2017}}{2016}$, deci $\frac{\sqrt{2016}}{2015} > \frac{\sqrt{2017}}{2016}$.

5.
$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$