UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs MATE-INFO UBB, 16 aprilie 2016
Proba scrisă la MATEMATICĂ
Varianta III

SUBIECTUL I (30 puncte)

Problema 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4$.

Problema 2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*,\ f(x)=\cos(2x\pi)+i\sin(2x\pi)$.
a) Să se arate că f este un morfism de la grupul $(\mathbb{R},+)$ la grupul $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.
b) Este f injectivă? Dar surjectivă? Justificaţi răspunsurile.
c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)$ este o rădăcină de ordinul 4 a unităţii.
d) Sunt izomorfe grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$? Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL II (30 puncte)

Problema 1. În planul triunghiului ABC se consideră punctele P şi Q astfel încât

$$\overrightarrow{PC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \text{ şi } \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

a) Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{PQ}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstraţi că punctele P,Q şi mijlocul C' al laturii AB sunt coliniare.

Problema 2. Rezolvaţi şi discutaţi rădăcinile ecuaţiei

$$(2m-1)\cos 2x-9\cos x+m-5=0,$$

după valorile parametrului real m.

SUBIECTUL III (30 puncte)

Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=|x|\cdot\sqrt[3]{1-x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

1. Determinaţi domeniul maxim de derivabilitate al funcţiei f şi calculaţi f'.
2. Arătaţi că
$$f(x)\le\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{6}}},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$
3. Calculaţi f'' şi determinaţi punctele de inflexiune ale funcţiei f.
4. Calculaţi $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.
5. Determinaţi
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x)dx.$$

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Barem - Varianta III

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Condiţiile de existenţă ale radicalilor $x+7\geq 0$ şi $x-1\geq 0$, adică $x\in[1,\infty)$ 2p
Prin ridicare la pătrat, ecuaţia devine
$x+7+x-1+2\sqrt{(x+7)(x-1)}=16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+6x-7}=5-x$. 3p
Egalitatea poate avea loc numai dacă $-x+5\geq 0$.
Prin urmare, $x\in[1,5]$ 2p
Prin ridicare la pătrat, obţinem $x^2+6x-7=x^2-10x+25 \Leftrightarrow 16x=32 \Leftrightarrow x=2$. 3p
Observaţie: Indiferent de metoda de rezolvare aleasă, în lipsa condiţiilor care permit păstrarea şirului de echivalenţe, cele 4 puncte acordate pentru stabilirea acestora se vor acorda dacă a fost făcută verificarea soluţiilor obţinute.

2. a) Aplicarea regulii de înmulţire a numerelor complexe scrise în formă trigonometrică şi stabilirea faptului că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ 5p
b) f nu este injectivă: $f(x+k)=f(x),\ \forall k\in\mathbb{Z}^*$ 2p
f nu este surjectivă deoarece nici un număr complex nenul de modul diferit de 1 nu aparţine mulţimii $f(\mathbb{R})$ 3p
c) $[f(x)]^4=1 \Leftrightarrow f(x)\in\{\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x\in\{\frac{k}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 5p
d) Presupunând că ar exista un izomorfism $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$, ar exista $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(a)=-1$, prin urmare $g(0)=1=(-1)^2=[g(a)]^2=g(2a)$, ceea ce implică $2a=0$, adică $a=0$. Dar atunci $1=g(0)=g(a)=-1$, contradicţie 5p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

SUBIECTUL II (30 puncte)

Problema 1

(a) $\overrightarrow{PQ}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 5p
(b) 5p
Varianta vectorială
determinarea vectorului $\overrightarrow{PC'}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 4p
$\overrightarrow{PC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ şi concluzia 1p
Varianta cu reciproca teoremei lui Menelaus
calculul rapoartelor 4p
concluzia 1p

Problema 2

obţinerea ecuaţiei $2(2m-1)\cos^2 x-9\cos x-(m+4)=0$ 3p
obţinerea ecuaţiei $2(2m-1)t^2-9t-(m+4)=0$ 1p
calculul lui $\Delta=(4m+7)^2$ 3p
determinarea rădăcinilor $t_1=-\frac{1}{2}$ şi $t_2=\frac{m+4}{2m-1}$ 3p
scrierea soluţiilor ecuaţiei iniţiale 3p
discuţia soluţiilor pentru rădăcina ce depinde de m 5p
discuţia cazului $m=1/2$ 2p

SUBIECTUL III (30 puncte)

1.

obţinerea expresiei $f'(x)=\begin{cases}-\frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}, & x<0, x\neq -1\\ \frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}, & x>0, x\neq 1\end{cases}$ 4p

studiul derivabilităţii în $x=0$ 2p

domeniul maxim de derivabilitate $D=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$ 2p

2.
studiul monotoniei 2p
determinarea punctelor de maxim 1p
calcularea maximului 1p

3.
calcularea expresiei pentru $f''(x) = \frac{2x(5x^2-9)}{9(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$, pentru $x > 0, x \neq 1$ 2p
calcularea expresiei $f''(x)$ pentru $x < 0, x \neq -1$ 2p
stabilirea punctelor de inflexiune din D 2p
studiul convexităţii în vecinătatea punctelor $-1, 0, 1$ şi determinarea punctelor de inflexiune $i_3 = 1$ şi $i_4 = -1$ 2p

4.
calculul integralei $I = \frac{3}{4}$ 6p

5.
majorarea integralei 2p
folosirea criteriului majorării 2p