UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs Mate-Info UBB, 29 martie 2014
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. a) Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Dacă $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ arătaţi că $\alpha = \beta = \gamma$.
b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$. Determinaţi numerele reale a şi b ştiind că f este divizibil cu $X - 2$ iar restul împărţirii lui f la $X + 1$ este 11.

3. a) Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ mulţimea matricilor pătratice de ordinul 2 cu elemente din $\mathbb{Z}_3$. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.
b) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\widehat{x}^3 = \widehat{x}$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră punctele $O(0,0), A(3,4)$ şi $B(x,y)$. Să se determine numerele reale x, y astfel încât triunghiul OAB să fie echilateral.

2. Fie OAB un triunghi echilateral, unde $O(0,0)$, $A(m,n)$ cu $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $B(x,y)$ cu $x, y \in (0, +\infty)$. Demonstraţi că B nu poate avea ambele coordonate numere naturale.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\min\{\sin x, \cos x\} = \frac{\pi}{4}$ în mulţimea $[0, 2\pi]$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

Pentru fiecare triplet (a,b,c) de numere reale considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 2\sin x + \cos x & \text{dacă} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1. Determinaţi toate tripletele (a,b,c) pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$.

2. Determinaţi toate tripletele (a,b,c) pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

3. Arătaţi că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru un unic triplet (a,b,c) şi în acest caz calculaţi $\int_{-1}^{\pi} f''(x)dx$.

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.