BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MATEK-INFO UBB verseny – 2019. április 6.
Írásbeli próba matematikából

FONTOS MEGJEGYZÉS:

1) Az A. részben megjelenő feleletválasztós feladatok esetén egy vagy több helyes válasz lehet, melyeket a versenyzők a vizsgalap mellé kapott speciális nyomtatványra kell bejelöljenek. Ezeknek a feladatoknak a pontozása a verseny szabályzatában megfogalmazott parciális pontozási rendszer szerint történik.

2) A B. részben megjelenő feladatok esetén a teljes megoldás leírása szükséges. Ezeket a feladatokat a javítók a megadott javítókulcsnak megfelelően pontozzák.

A. RÉSZ

1. (6 pont) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt értelmezzük az $f(x)=x^2+2(a-1)x+a-1$ képlettel, ahol $a\in\mathbb{R}$. Az $f(x)=0$ egyenletnek nincs egyetlen valós megoldása sem, ha

A $a\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$; B $a\in(-\infty,1)$; C $a\in(0,1)$; D $a\in\left(\frac{3}{2},2\right)$.

2. (6 pont) A $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3})^{19}$ binom kifejtésében a racionális tagok száma

A 3; B 6; C 0; D 2.

3. (6 pont) Adott az alábbi valós együtthatós egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a\,. \end{cases}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Egyetlen olyan $a\in\mathbb{R}$ létezik, amelyre az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

B Egyetlen olyan $a\in\mathbb{R}$ létezik, amelyre az egyenletrendszernek több megoldása van.

C Egyetlen olyan $a\in\mathbb{R}$ létezik, amelyre az egyenletrendszer összeférhetetlen.

D Ha az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, akkor y nem függ a-tól.

4. (6 pont) Ha $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ az

$$f=X^3+2X^2+3X+4\in\mathbb{R}[X]$$

polinom gyökei és $a=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}$, akkor

A $a=\frac{3}{2}$; B $a=-2$; C $a=\frac{4}{3}$; D $a=-\frac{7}{16}$.

5. (6 pont) A $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi-2\operatorname{arctg} x)$ határérték

A 1; B 2; C nagyobb mint $\frac{\pi}{2}$; D nem létezik.

6. (6 pont) Adott az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$ függvény az $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+x}{x^{2n}+1}$ képlettel, ahol $n\in\mathbb{N}$. Akkor

$\boxed{\text{A}}$ az f függvény folytonos a 0-ban;

$\boxed{\text{B}}$ az f függvény folytonos a -1-ben;

$\boxed{\text{C}}$ az f függvény baloldali határértéke a -1-ben egyenlő 0-val;

$\boxed{\text{D}}$ az f függvény nem folytonos 1-ben.

7. (6 pont) Legyen az $f:(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to\mathbb{R}$ függvény az $f(x)=(2x-7)\sqrt{x^2-1}$ képlettel értelmezve. Akkor

$\boxed{\text{A}}$ f-nek egyetlen helyi szélsőértékpontja van;

$\boxed{\text{B}}$ f-nek három helyi szélsőértékpontja van;

$\boxed{\text{C}}$ f szigorúan növekvő a $(-\infty,-1]$ intervallumon;

$\boxed{\text{D}}$ f szigorúan növekvő a $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$ halmazon.

8. (6 pont) Az $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ integrál értéke

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\pi}{2}-1$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{2}+1$; $\boxed{\text{D}}$ 0.

9. (6 pont) Ha az $A(2,3)$ pont az origóból a d egyenesre húzott merőleges talppontja, akkor a d egyenes egyenlete

$\boxed{\text{A}}$ $2x-3y+5=0$; $\boxed{\text{B}}$ $3x-2y-17=0$; $\boxed{\text{C}}$ $3x+2y-13=0$; $\boxed{\text{D}}$ $2x+3y-13=0$.

10. (6 pont) A $\sin x+\cos^3 x=\cos x+\sin^3 x$ egyenlet megoldáshalmaza

$\boxed{\text{A}}$ $\left\{\frac{k\pi}{4}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{C}}$ $\left\{\frac{k\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{D}}$ $\left\{\frac{k\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. RÉSZ

1. (10 pont) Tekintsük a $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ gyűrűt, ahol $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. Minden $x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ elem esetén használjuk a következő jelölést: $\bar{x}=a-b\sqrt{2}$. Legyen továbbá az $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}$ függvény az $f(x)=x\cdot\bar{x}$ képlettel megadva.

(a) Igazoljuk, hogy $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$, bármely $x_1,x_2\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ esetén!

(b) Igazoljuk, hogy ha az $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ elem invertálható, akkor $f(x)\in\{-1,1\}$.

(c) Test-e a $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ gyűrű? Indoklás.

2. (10 pont) Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény aszimptotáit, ahol a függvényt az alábbi képlettel értelmezzük

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. (10 pont) Egy $ABCD$ konvex négyszögben legyenek E és F az $[AC]$, illetve $[BD]$ átlók felezőpontjai. Ha $4\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$, akkor igazoljuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!

MEGJEGYZÉS:
Minden feladat kötelező. Minden részvevőnek 10 pont jár hivatalból.
A munkaidő 3,5 óra.

Válaszok és megoldások

A. RÉSZ

Válaszok:

1. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{D}}$; **2.** $\boxed{\text{A}}$; **3.** $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{D}}$; **5.** $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$;

6. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$; **7.** $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$; **8.** $\boxed{\text{A}}$; **9.** $\boxed{\text{D}}$; **10.** $\boxed{\text{C}}$.

Megoldások:

1. Az $f(x) = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása, ha $\Delta = 4(a-1)^2 - 4(a-1) = 4(a-1)(a-2) < 0 \Leftrightarrow a \in (1,2)$.

2. A kifejtés általános tagja:

$$T_{k+1} = C_{19}^{k}\sqrt{3}^{19-k}\sqrt[3]{3}^{k} = C_{19}^{k}3^{\frac{19-k}{2}}3^{\frac{k}{3}}, \quad k \in \{0,\dots,19\}.$$

A T_{k+1} tag racionális $\Leftrightarrow k \in \{0,\dots,19\}$, $3|k$ és $2|(19-k) \Leftrightarrow k \in \{0,3,6,9,12,15,18\}$ és $2|(19-k)$ $\Leftrightarrow k \in \{3,9,15\}$. Tehát a kifejtés racionális tagjainak száma 3.

3. Jelölje A az egyenletrendszer mátrixát, ekkor $\det(A) = (a-1)^2$. Tehát $\det(A) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $a = 1$. Az alábbi két esetet különböztetjük meg:

- Ha $a = 1$, akkor az egyenletrendszer ekvivalens az $x+y+z = 1$ egyenlettel, tehát végtelen sok megoldása van.
- Ha $a \neq 1$, akkor a rendszer Cramer-rendszer és egyetlen megoldása van. Ekkor $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2$, tehát $y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = -1$ nem függ a-tól.

4. A Viète-összefüggések alapján $x_1+x_2+x_3 = -2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 3$ és $x_1x_2x_3 = -4$. Tehát

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2}{(x_1x_2x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 - 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^2}{(x_1x_2x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{(x_1x_2x_3)^2} = -\frac{7}{16}. \end{aligned}$$

5. Alkalmazva a l'Hôpital-szabályt, kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg} x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$$

6. Ha $x \in (-1,1)$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, vagyis $f(x) = x$. Természetesen $f(1) = 1$. Ha $|x| > 1$, akkor

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n + x}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{x}{x^n}}{x^n\left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)} = 0.$$

Tehát

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<-1\\ x, & \text{ha } -1<x\le 1\\ 0, & \text{ha } x>1.\end{cases}$$

7. Az f függvény folytonos a $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ halmazon és deriválható a $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ halmazon. Minden $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ esetén

$$f'(x)=2\sqrt{x^2-1}+\frac{x(2x-7)}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{4x^2-7x-2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Az $f'(x)=0$ egyenlet gyökei $-1/4$ és 2, az alábbi táblázat pedig szemlélteti az f függvény változását.

x	$-\infty$			-1			1			2			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\vert$	$\vert$	0	$\searrow$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

A táblázatból látható, hogy a -1 és 1 pontok helyi maximumpontjai, míg a 2 helyi minimumpontja f-nek. Ugyanakkor a táblázat alapján látható, hogy az f függvény szigorúan növekvő a $(-\infty,-1]$-en, de nem szigorúan növekvő a $(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$ halmazon.

8.

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(\sin x)'\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\sin x\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\,\mathrm{d}x=(x-\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

9. Az OA egyenes iránytényezője $m_{OA}=\frac{3}{2}$, vagyis a d egyenes iránytényezője $m_d=\frac{-1}{m_{OA}}=-\frac{2}{3}$. Így a d egyenes egyenlete: $d: y-3=-\frac{2}{3}(x-2)$, vagyis $d: 2x+3y-13=0$.

10. *1. Megoldás.* Átalakítjuk az egyenletet:

$$\sin x+\cos^3 x=\cos x+\sin^3 x\Leftrightarrow\cos^3 x-\sin^3 x=\cos x-\sin x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x)=\cos x-\sin x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos x-\sin x)(1+\cos x\sin x)=\cos x-\sin x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos x-\sin x)\cos x\sin x=0.$$

I. eset. $\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow\cos x=\sin x\Leftrightarrow x\in\{\frac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.
II. eset. $\cos x\sin x=0\Leftrightarrow x\in\{\frac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$.
Tehát a megoldáshalmaz $\{\frac{k\pi}{2}\big|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{\pi}{4}+k\pi\big|k\in\mathbb{Z}\}$.
2. Megoldás. Átrendezzük az egyenletet:

$$\sin x+\cos^3 x=\cos x+\sin^3 x\Leftrightarrow\sin x(1-\sin^2 x)=\cos x(1-\cos^2 x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sin x\cos^2 x=\cos x\sin^2 x\Leftrightarrow\sin x\cos x(\cos x-\sin x)=0.$$

A megoldáshalmazt ugyanúgy kapjuk, mint az előbbi esetben.

B. RÉSZ

Megoldás és javítókulcs:

1. (a) (3 pont) Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ esetén

$$f(x_1x_2) = (x_1x_2)(\overline{x_1x_2}) = (x_1\overline{x_1})(x_2\overline{x_2}) = f(x_1)f(x_2),$$

mivel $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben az elemek szorzása kommutatív.

(b) (1 pont) Mivel az $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ elem invertálható, következik, hogy létezik $x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, amelyre $xx' = 1$.

(2 pont) Tehát $f(x)f(x') = f(xx') = f(1) = 1$ az (a) alpont alapján.

(1 pont) Mivel $f(x) \in \mathbb{Z}$, kapjuk, hogy $f(x) \in \{-1, 1\}$.

(c) (3 pont) Legyen például $x = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ekkor az $x \neq 0$ elem nem invertálható a (b) alpont alapján, mert $f(x) = 2 \notin \{-1, 1\}$. Tehát $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ nem test.

2. (0,5 pont) Mivel az f folytonos az $\mathbb{R}$-en, nincs függőleges aszimptotája.

(0,5+0,5 pont) Ugyanakkor

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$

tehát f-nek nincsenek vízszintes aszimptotái.

Kiszámítjuk az alábbi határértékeket:

$$\textbf{(1,5 pont)} \quad m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2 pont)} \quad n_1 &= \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \lim_{x\to\infty} \left(x - 3 - \sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 - 1}{x - 3 + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-6 + \frac{8}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} = -3.
\end{aligned}$$

(1 pont) Tehát, az $y = x - 3$ egyenes az f grafikonjának ferde aszimptotája $+\infty$ felé.

Hasonlóan,

$$\textbf{(1 pont)} \quad m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{-x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1,$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2 pont)} \quad n_2 &= \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) + x\big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \lim_{x\to\infty} \left(x - 3 + \sqrt{x^2+1}\right) \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 - 1}{x - 3 - \sqrt{x^2+1}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-6 + \frac{8}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} = 3.
\end{aligned}$$

(1 pont) Tehát, az $y = -x + 3$ egyenes az f grafikonjának ferde aszimptotája $-\infty$ felé.

Megjegyzés. A ferde aszimptoták meghatározása utáni azon megállapítás, hogy nem léteznek vízszintes aszimptoták, maga után vonja annak az 1 pontnak az elérését, mely az f függvény határértékeinek $\pm\infty$-beli kiszámítása után járt volna.

3. Mivel F felezőpontja a $[BD]$ szakasznak, felírhatjuk, hogy $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED})$ **(2 pont)**. Hasonlóan, mivel E felezőpontja $[AC]$-nek, írhatjuk, hogy $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ **(2 pont)** és $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$ **(2 pont)**.

Így

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor a feltétel alapján

$$4\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Tehát $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ **(1 pont)**, vagyis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ami azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma **(2 pont)**.