BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MATE-INFO UBB verseny, 2017. április 1.
Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL

I. TÉTEL (30 pont)

1) (15 pont) Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol $a \in \mathbb{R}$.

Tárgyald az a paraméter függvényében, hogy létezik-e olyan $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mátrix, amelynek az elemei valós számok, és amelyre teljesül az $AX = B$ egyenlőség!
Ha létezik az előbbi feltételeket teljesítő X mátrix, akkor számítsd is ki X-et!

2) (10 pont) $a, b \in \mathbb{Q}$ esetén tekintjük az $f_{a,b} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f_{a,b}(x) = ax + b$ függvényt. Határozd meg azokat az (a, b) számpárokat, amelyekre $f_{a,b}$ egy izomorfizmus a $(\mathbb{Q}, +)$ csoportról saját magára!

3) (5 pont) Oldd meg a $\widehat{4}x + \widehat{8} = \widehat{0}$ egyenletet a $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ gyűrűben!

II. TÉTEL (30 pont)

1) (20 pont) Adott a $P(0, 1)$ pont és a $d_1 : x - 3y + 10 = 0$, illetve $d_2 : 2x + y - 8 = 0$ egyenes. A P ponton áthaladó d egyenes a d_1 egyenest az A pontban, a d_2 egyenest a B pontban metszi. Határozd meg a d egyenes egyenletét, ha P az $[AB]$ szakasz felezőpontja!

2) (10 pont) Oldd meg a következő egyenletet:

$$\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x.$$

III. TÉTEL (30 pont)

1) Tekintjük az $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x},$$

függvényt, ahol $D \subset \mathbb{R}$ az f függvény maximális értelmezési tartománya.
a) (5 pont) Határozd meg a D halmazt!
b) (5 pont) Számítsd ki az f'-t függvényt!
c) (5 pont) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!
d) (5 pont) Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{\sqrt{2016}}{2015} > \frac{\sqrt{2017}}{2016}.$$

2) (10 pont) Számítsd ki az $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ integrált és a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k+n}$ határértéket!

MEGJEGYZÉS:
Minden tétel kötelező. Hivatalból 10 pont jár.
Munkaidő 3 óra.

MEGOLDÁS

I. TÉTEL (30 pont)

Lásd a javítókulcsot.

II. TÉTEL (30 pont)

1. Első megoldás. A P-n áthaladó egyenesek egyenlete $y-1=kx$ vagy $x=0$. A második esetben az A és B koordinátái $A(0,\frac{10}{3})$, illetve $B(0,8)$. Így AB felezőpontja nem P, tehát a d egyenletének meghatározásához elégséges az egyenes k irnýtényezőjét meghatározni. Az A pont koordinátái az

$$\begin{cases} y=kx+1, \\ x-3y+10=0, \end{cases}$$

rendszer megoldásai. Ez alapján

$$x-3xk-3+10=0,$$

tehát

$$x_A=\frac{7}{3k-1}$$

és

$$y_A=\frac{10k-1}{3k-1}.$$

Hasonlóan a B koordinátái az

$$\begin{cases} y=kx+1, \\ 2x+y-8=0, \end{cases}$$

rendszer megoldásai, tehát

$$2x+kx+1-8=0,$$

ahonnan

$$x_B=\frac{7}{k+2}$$

és

$$y_B=\frac{8k+2}{k+2}.$$

Az $[AB]$ szakasz felezőpontjának a koordinátái

$$x_0=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3k-1}+\frac{7}{k+2}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{4k+1}{(3k-1)(k+2)},$$

tehát $x_0=0$ pontosan akkor teljesül, ha $k=-\dfrac{1}{4}$. Erre az értékre

$$A=A(-4,2), B=B(4,0)$$

és valóban az $[AB]$ felezőpontja P, tehát a keresett egyenes iránytényezője $-1/4$ és az egyenlete

$$y=-\frac{1}{4}x+1$$

vagyis

$$x+4y-4=0.$$

Második megoldás. Jelöljük Q-val a d_1 és d_2 metszéspontját. Ha A a d_1 egyenes, és B a d_2 egyenes tetszőleges pontja, akkor az $[AB]$ szakasz felezőpontja pontosan akkor P, ha $2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}$.

A Q pont koordinátái az

$$\begin{cases} x-3y+10=0, \\ 2x+y-8=0, \end{cases}$$

rendszer megoldásai, tehát $Q(2,4)$. Így a $\overrightarrow{QP}$ vektor komponensei $(-2,-3)$.

Ha $A \in d_1$ tetszőleges, akkor

$$x_A - 3y_A + 10 = 0.$$

Az $y_A = t$ jhelöleéssel $x_A = 3t - 10$, tehát $A = (3t-10, t)$, vagyis a $\overrightarrow{QA}$ vektor komponensei $(3t-12, t-4)$.

Hasonló módon ha $B \in d_2$, akkor

$$2x_B + y_B - 8 = 0.$$

Az $x_B = s$ jelöléssel $B(s, -2s+8)$, tehát $\overrightarrow{QB}$ komponensei $(s-2, 4-2s)$.

A

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QP}$$

egyenlőség ekvivalens a

$$\begin{cases} 3t + s = 10, \\ t - 2s = -6 \end{cases}$$

rendszerrel, ahonnan $t = 2, s = 4$, vagyis $A(-4,2), B(4,0)$. A d egyenes egyenlete

$$\frac{x+4}{4+4} = \frac{y-2}{0-2}$$

vagyis

$$x + 4y - 4 = 0.$$

2. Az egyenlet rendre a következő ekvivalens alakba írható:

$$\sin(x + 30^\circ) + \sin(90^\circ - x - 60^\circ) = 1 + \cos 2x$$

$$\sin(x + 30^\circ) + \sin(30^\circ - x) = 1 + \cos 2x,$$

$$2\sin\frac{x + 30^\circ + 30^\circ - x}{2} \cdot \cos\frac{x + 30^\circ - 30^\circ + x}{2} = 1 + \cos 2x$$

$$2\sin 30^\circ \cdot \cos x = 1 + \cos 2x$$

$$\cos x = 1 + \cos 2x.$$

$$\cos x = 1 + 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x.$$

Így a

$$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0.$$

egyenlethez jutunk.

1. Ha $\cos x = 0$, akkor

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

2. ha $\cos x = \dfrac{1}{2}$, akkor

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

tehát az eredeti egyenlet megoldásainak halmaza $M = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

III. TÉTEL (30 pont)

1. A négyzetgyök létezési feltétele $x+1 \geq 0$ és a tört létezési feltétele $x \neq 0$, tehát $D = [-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

2. A gyökfüggvény, az összetett függvény és a tört deriválási szabályát alkalmazzuk:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1}}{x^2} = \frac{\frac{x-2x-2}{2\sqrt{x+1}}}{x^2} = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}.$$

3. Ha $x \in D$, akkor $x+2 > x+1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ és $\sqrt{x+1} \geq 0$, tehát $f'(x) < 0$, minden $x \in D$. Így f szigorúan csökkenő a $[-1, 0)$ és a $(0, +\infty)$ intervallumokon.

4. Mivel f csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon, írhatjuk, hogy

$$2015 < 2016 \Rightarrow f(2015) > f(2016).$$

Másrészt $f(2015) = \frac{\sqrt{2016}}{2015}$ és $f(2016) = \frac{\sqrt{2017}}{2016}$, tehát $\frac{\sqrt{2016}}{2015} > \frac{\sqrt{2017}}{2016}$.

5.
$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Javítókulcs

I. TÉTEL (30 pont)

1) $AX = B \ \Leftrightarrow\ (S)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=a \\ 4x+9y+z=a^2 \\ 8x+27y+z=a^3 \end{cases}$ .... 2 p

Mivel $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, (S) pontosan akkor összeférhető, ha $\Leftrightarrow\ d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & a \\ 4 & 9 & 1 & a^2 \\ 8 & 27 & 1 & a^3 \end{vmatrix} = 0$ .... 1 p

$d = 2(a-1)(a-2)(a-3) = 0 \Leftrightarrow a \in \{1,2,3\}$ .... 3 p

Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ az (S) rendszer összeférhetetlen, tehát nem létezik olyan X, amely teljesítené a kért feltételeket .... 2 p

Ha $a \in \{1,2,3\}$, az (S) rendszer összeférhető és határozott, ... 1 p

valamint ekvivalens az $(S')\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=a \\ 4x+9y+z=a^2 \end{cases}$ rendszerrel, amelynek a megoldásai .... 1 p

$x = -(1-a)(3-a),\ y = \dfrac{1}{2}(1-a)(2-a),\ z = \dfrac{1}{2}(2-a)(3-a)$ .... 3 p

$a = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .... 2 p

Megjegyzés: Az utolsó 6 pont egyenlően szétosztható, ha a három esetet külön-külön tárgyaljuk.

2) f a $(\mathbb{Q},+)$ endomorfizmusa $\ \Rightarrow\ f(0)=0\ \Rightarrow\ b=0$ .... 2 p

$\forall a \in \mathbb{Q},\ \forall x,y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f(x)+f(y)$, tehát

$f_{a,b}$ morfizmus $\ \Leftrightarrow\ b = 0$ .... 3 p

$f_{a,0}$ bijekció $\ \Leftrightarrow\ \forall y \in \mathbb{Q}, \exists$ pontosan egy $x \in \mathbb{Q}$, amelyre $y = f(x) = ax$.

$\Leftrightarrow\ a \neq 0$ şi $x = \dfrac{y}{a}$ .... 4 p

Megjegyzés: Az injektivitás és a szürjektivitás külön-külön ellenőrzése esetén 2-2 pont jár mindkét tulajdonság helyes igazolásáért.

A keresett számpárok halmaza $\{(a,0) \mid a \in \mathbb{Q}^*\}$ .... 1 p

3) $\widehat{4}x + \widehat{8} = \widehat{0}\ \Leftrightarrow\ \widehat{4}(x+\widehat{2}) = \widehat{0}\ \Leftrightarrow\ x + \widehat{2} \in \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}\}$ .... 3 p

$\Leftrightarrow\ x \in \{\widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{7}, \widehat{10}\}$ .... 2 p

II. TÉTEL (30 pont)

1. Első megoldás

Az $x = 0$ egyenletű egyenes vizsgálata .... 1 p

$(d): y = kx + 1$ .... 3 p

az A és B koordinátái k függvényében .... 4 p

az $x_A + x_B = 2x_P (= 0)$ feltétel .... 3 p

a k meghatározása .... 4 p

annak ellenőrzése, hogy P valóban az $[AB]$ felezőpontja .... 3 p

a $(d): x + 4y - 4 = 0$ egyenes egyenlete .... 3 p

Második megoldás

a Q pont koordinátái .... 4 p

a $\overrightarrow{QP}$ vektor komponensei .... 2 p

az A és B pontok koordinátái a paraméterek függvényében .... 4 p

a $\overrightarrow{QA}$ és $\overrightarrow{QB}$ vektorok komponensei .... 3 p

a $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QP}$ feltétel .... 2 p

az A és B koordinátáinak meghatározása .... 3 p
az AB egyenlete $(d): x+4y-4=0$ .... 2 p

Problema 2

a $\sin(x+30°)+\cos(x+60°)=\cos x$ összefüggés .... 3 p
a $\cos x\,(2\cos x-1)=0$ alak megtalálása .... 3 p
a $\cos x=0$ megoldásai .... 2 p
a $\cos x=\dfrac{1}{2}$ megoldásai .... 2 p

III. TÉTEL (30 pont)

1) $x+1\geq 0$ .... 2 p
$x\neq 0$ .... 2 p
$D=[-1,+\infty)\setminus\{0\}$ .... 1 p
2) $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot x-\sqrt{x+1}}{x^2}=\frac{\frac{x-2x-2}{2\sqrt{x+1}}}{x^2}=-\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$. .... 5 p
3) $f'(x)<0,\forall x\in D$ .... 3 p
f csökkenő $[-1,0)$ .... 1 p
f csökkenő $(0,+\infty)$ .... 1 p
4) $f(2015)=\frac{\sqrt{2016}}{2015}$ .... 1 p
$f(2016)=\frac{\sqrt{2017}}{2016}$ .... 1 p
f csökkenő $0<2015<2016\Rightarrow f(2015)>f(2016)$ .... 3 p
5) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\;dx=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}}\;dx$ .... 2 p
$\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}}\;dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$ .... 2 p
$\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$ .... 2 p
$\displaystyle L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$ .... 1 p
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\;dx$ .... 2 p
$L=\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$ .... 1 p

Megjegyzés: Az előbbiektől eltérő helyes megoldásokat is pontozzuk.