BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MATE-INFO UBB verseny, 2016. április 16.
Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL
III. változat

I. TÉTEL (30 pont)

1. Feladat. Határozd meg a $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4$ egyenlet valós megoldásait!

2. Feladat. Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$, $f(x)=\cos(2x\pi)+i\sin(2x\pi)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ függvényt.

a) Bizonyítsd be, hogy f egy csoportmorfizmus az $(\mathbb{R},+)$ és $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ csoportok közt!
b) Injektív-e az f? Szürjektív-e az f? Indokold válaszaidat!
c) Határozd meg az $x\in\mathbb{R}$ értékeit, amelyekre $f(x)$ negyedrendű egységgyök!
d) Izomorfak-e az $(\mathbb{R},+)$ és $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ csoportok? Indokold a válaszodat!

II. TÉTEL (30 pont)

1. Feladat. Az ABC háromszög síkjában felvesszük a P és Q pontokat úgy, hogy

$$\overrightarrow{PC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \text{ és } \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

a) Fejezd ki a $\overrightarrow{PQ}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok függvényében!

b) Bizonyítsd be, hogy a P,Q pontok és az AB oldal C' felezőpontja egy egyenesen vannak!

2. Feladat. Oldd meg és tárgyald a

$$(2m-1)\cos 2x-9\cos x+m-5=0,$$

egyenlet megoldását az m valós paraméter függvényében!

III. TÉTEL (30 pont)

Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=|x|\cdot\sqrt[3]{1-x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

függvényt.

1. Határozd meg az f maximális deriválhatósági tartományát és számítsd ki az f' függvényt!
2. Bizonyítsd be, hogy
$$f(x)\leq\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{6}}},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$
3. Számítsd ki az f'' függvényt és határozd meg az f inflexiós pontjait!
4. Számítsd ki az $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ integrált!
5. Számítsd ki a
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x)dx$$
határértéket!

MEGJEGYZÉS:

Minden tétel kötelező. Hivatalból 10 pont jár.
Munkaidő 3 óra.

III. változat - Javítókulcs

I. TÉTEL (30 puncte)

1. A gyökök létezési feltételei $x+7 \geq 0$ és $x-1 \geq 0$, tehát $x \in [1, \infty)$ 2p
Négyzetre emeléssel
$x+7+x-1+2\sqrt{(x+7)(x-1)} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+6x-7} = 5-x$........ 3p
Ez csak akkor teljesülhet, ha $-x+5 \geq 0$, tehát $x \in [1, 5]$........ 2p
Ismét négyzetre emelve $x^2+6x-7 = x^2-10x+25 \Leftrightarrow 16x = 32 \Leftrightarrow x = 2$........ 3p
Megjegyzés: A megoldási módszertől függetlenül, az ekvivalens átalakítást biztosító feltételekre adott 4 pont megadható a kapott megoldás(ok) ellenőrzésére.

2. a) A trigonometriai alakban írt komplex számok szorzása alapján az $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ bizonyítása 5p
b) f nem injektív mert $f(x+k) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$ 2p
f nem szürjektív mert f csak egységmodulusú komplex számokat vesz fel, tehát a képtartomány nem a teljes $\mathbb{C}^*$........ 3p
c) $[f(x)]^4 = 1 \Leftrightarrow f(x) \in \{\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{k}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 5p
d) Ha létezne a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ izomorfizmus, akkor létezne olyan $a \in \mathbb{R}$, amelyre $g(a) = -1$. Így $g(0) = 1 = (-1)^2 = [g(a)]^2 = g(2a)$, tehát $2a = 0$. Ez alapján $a = 0$ és ez ellentmondás mert $1 = g(0) = g(a) = -1$ 5p

II. TÉTEL (30 pont)

1. Feladat
(a) $\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 5p
(b) 5p
vektoriális változat
az $\overrightarrow{PC'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ meghatározása........ 4p
$\overrightarrow{PC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ és a következtetés 1p
II. változat: Menelaosz fordított tételét használva
az arányok kiszámítása 4p
a következtetés 1p
2. Feladat
a $2(2m-1)\cos^2 x - 9\cos x - (m+4) = 0$ egyenlet levezetése........ 3p
a $2(2m-1)t^2 - 9t - (m+4) = 0$ egyenlet felírása........ 1p
$\Delta = (4m+7)^2$ kiszámítása 3p
a $t_1 = -\frac{1}{2}$ és $t_2 = \frac{m+4}{2m-1}$ gyökök kiszámítása........ 3p
az eredeti egyenlet megoldásának felírása........ 3p
az m-től függő gyök tárgyalása........ 5p
az $m = 1/2$ eset tárgyalása........ 2p

III. TÉTEL (30 pont)

1.
az $f'(x) = \begin{cases} -\frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}, & x < 0, x \neq -1 \\ \frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}, & x > 0, x \neq 1 \end{cases}$ kiszámítása 4p

a deriválhatóság tanulmányozása $x = 0$-ban 2p

a maximális deriválhatósági tartomány meghatározása $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. 2p

2.
a monotonitás tanulmányozása 2p
a maximumpontok meghatározása 1p
a függvény maximumának meghatározása 1p

3.
az $f''(x) = \frac{2x(5x^2-9)}{9(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$, kiszámítása $x > 0, x \neq 1$ esetén 2p
$f''(x)$ kiszámítása $x < 0, x \neq -1$ esetén 2p
a D-beli inflexiós pontok meghatározása 2p
a konvexitás tanulmányozása a $-1, 0, 1$ pontok környezetében és az $i_3 = 1$, $i_4 = -1$ inflexiós pontok meghatározása 2p

4.
az integrál kiszámítása $I = \frac{3}{4}$ 6p

5.
az integrál majorálása 2p
a majorálási kritérium alkalmazása 2p