BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

BBTE Matek-Info verseny, 2015. április 25.
MATEMATIKA írásbeli próba

I. TÉTEL (30 pont)

1. Tekintsük az $x^4 - (2m-1)x^2 + 4m - 5 = 0$ egyenletet, ahol m egy valós paraméter.

a) Az $m = 1/2$ esetben oldjuk meg az egyenletet a komplex számok halmazán.

b) Határozzuk meg az m azon értékeit, amelyekre az egyenlet minden gyöke valós.

2. Legyen $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egy valós számokat tartalmazó mátrix. Igazoljuk, hogy ha X nem invertálható, akkor $X^n = (a+d)^{n-1}X$, bármely $n \geq 2$ természetes szám esetén.

II. TÉTEL (30 pont)

1. Az Oxy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2, 3-m)$, $B(m+2, -1)$ és $C(m, 2-m)$ pontok, ahol m egy valós paraméter.

a) Igazoljuk, hogy bármely $m \in \mathbb{R}$ esetén az A, B, C pontok nem kollineárisok.

b) Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter azon értékét, amelyre az ABC háromszög területe minimális.

2. Oldjuk meg a $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \dfrac{1}{2}$ egyenlőtlenséget.

III. TÉTEL (30 pont)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ függvény.

a) Igazoljuk, hogy az f függvény páros, míg annak f' deriváltja páratlan függvény.

b) Határozzuk meg az f primitív függvényeit és igazoljuk, hogy azok közül az egyik páratlan függvény.

2. A $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény kielégíti az $\int_{-x}^{x} g(t)dt = 0$ összefüggést, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Igazoljuk, hogy g páratlan.

MEGJEGZÉSEK:

Minden tétel kötelező. 10 pont jár a megjelenésért. Az effektív munkaidő 3 óra.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs Mate-Info UBB, 25 aprilie 2015
BAREM pentru proba scrisă la MATEMATICĂ

OFICIU .... **10 puncte**

SUBIECTUL I .... **30 puncte**

1.

a) Pentru $m = 1/2$ ecuaţia devine $x^4 = 3$ .... 2 puncte

Aflarea rădăcinilor .... 8 puncte

b) Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca ecuaţia să aibă toate rădăcinile reale .... 4 puncte

Aflarea valorilor lui m .... 6 puncte

2.

Condiţia ca matricea să nu fie inversabilă .... 3 puncte

Demonstrarea proprietăţii cerute .... 7 puncte

SUBIECTUL II .... **30 puncte**

1.

a) Necoliniaritatea punctelor .... 10 puncte

b) Calculul ariei în funcţie de m .... 3 puncte

Valoarea lui m pentru care aria este minimă .... 7 puncte

2.

Reducerea inecuaţiei la o formă mai simplă .... 8 puncte

Determinarea mulţimii soluţiilor .... 2 puncte

SUBIECTUL III .... **30 puncte**

1.

a) Paritatea funcţiei f şi imparitatea funcţiei f' .... 10 puncte

b) Determinarea primitivelor lui f .... 10 puncte

Determinarea primitivei impare .... 5 puncte

2.

Derivarea membru cu membru în egalitatea dată .... 4 puncte

Deducerea imparităţii funcţiei g .... 1 puncte

NOTĂ: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.