

Concurs Mate-Info UBB, 29 martie 2014
Proba scrisă la MATEMATICĂ

I. TÉTEL (30 pont)

1. a) Legyenek az $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ valós számok. Ha $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, mutassuk ki, hogy $\alpha = \beta = \gamma$.

b) Oldjuk meg a $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$ egyenletet a valós számok halmazán.

2. Legyen az $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$ polinom. Határozzuk meg az a és b valós számokat tudva, hogy f osztható $X - 2$ -vel, illetve az $X + 1$ -el való osztási maradéka 11.

3. a) Jelölje $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ azon 2×2 -es mátrixok halmazát, amelyeknek elemei a \mathbb{Z}_3 halmazból vannak. Határozzuk meg az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ halmaz elemeinek a számát.

b) Oldjuk meg \mathbb{Z}_6 -ban a $\hat{x}^3 = \hat{x}$ egyenletet.

II. TÉTEL (30 pont)

1. Aottak az $O(0, 0)$, $A(3, 4)$ și $B(x, y)$ pontok. Határozzuk meg az x, y valós számokat úgy, hogy az OAB egyenlő oldalú háromszög legyen.

2. Legyen az OAB egyenlő oldalú háromszög, ahol $O(0, 0)$, $A(m, n)$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) és $B(x, y)$, ahol $x, y \in (0, +\infty)$. Bizonyítsuk be, hogy a B pont mindkét koordinátája nem lehet természetes szám.

3. Oldjuk meg a $\min\{\sin x, \cos x\} = \frac{\pi}{4}$ egyenletet a $[0, 2\pi]$ halmazon.

III. TÉTEL (30 pont)

Tetszőleges (a, b, c) valós számhármass esetén tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet az

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dacă } x < 0 \\ 2 \sin x + \cos x & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

képlettel értelmeztünk.

1. Határozzuk meg azokat az (a, b, c) számhármassokat, amelyekre az f függvény folytonos az \mathbb{R} -en.

2. Határozzuk meg azokat az (a, b, c) számhármassokat, amelyekre az f függvény deriválható az \mathbb{R} -en.

3. Mutassuk ki, hogy az f függvény kétszer deriválható az \mathbb{R} -en egyetlen (a, b, c) számhármass esetén és ebben az esetben számítsuk ki a $\int_{-1}^{\pi} f''(x)dx$ határozott integrált.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.