UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs Mate-Info UBB, 13 aprilie 2013
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = -1. \end{cases}$$

   Discuţie după $a \in \mathbb{R}$.

2. Determinaţi parametrul real a şi rezolvaţi ecuaţia

$$x^3 + 3x^2 - x - a = 0,$$

   ştiind că rădăcinile sale sunt în progresie aritmetică.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia

$$\sqrt[p]{x\sqrt[p]{x\sqrt[p]{x\ldots}}} = 2013,$$

   unde $p \geq 2$ este un număr natural, iar numărul radicalilor în ecuaţie este infinit.

SUBIECTUL II (30 puncte)

Se dau în planul xOy punctele $A\,(-1,0)$ şi $B\,(1,0)$.

1. Să se scrie ecuaţia dreptei d paralelă cu axa Ox, aflată la o distanţă de 3 unităţi deasupra axei.
2. Să se calculeze aria triunghiului PAB, unde P este un punct arbitrar pe dreapta (d) definită mai sus.
3. Să se determine punctul $M \in d$ pentru care măsura unghiului $\widehat{MAB}$ este $\frac{\pi}{6}$.
4. Să se determine punctul $Q \in d$ pentru care suma distanţelor $QA + QB$ este minimă.

SUBIECTUL III (30 puncte)

Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, definită prin $f\,(x) = |x-1|\,\sqrt{x}$.

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie D, precum şi mulţimile D_c şi D_d a punctelor în care funcţia f este continuă, respectiv derivabilă.
2. Să se determine intervalele de monotonie şi intervalele de concavitate/convexitate pentru f, cu precizarea punctelor de extrem local, a punctelor de inflexiune şi a punctelor unghiulare ale graficului lui f.
3. Să se afle aria suprafeţei plane delimitată de axa Ox, graficul funcţiei şi dreptele de ecuaţie $x = 0$ şi $x = 1$.

NOTĂ
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI"
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Baremul subiectului de concurs B
Proba de matematică

Oficiu: .... 10 puncte

I. .... 30 puncte

1. Calculul determinatului $det(A) = (a+2)(a-1)^2$ .... 2 puncte
   Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistem compatibil determinat .... 1 punct
   şi soluţia acestuia ... . 4 puncte
   Pentru $a = -2$ sistem compatibil nedeterminat .... 1 punct
   şi soluţia acestuia $\left(\frac{3\lambda-2}{3}, \frac{3\lambda-1}{3}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$ .... 4 puncte
   Pentru $a = 1$ sistem incompatibil .... 1 punct
2. Prima relaţie a lui Viète .... 1 punct
   Condiţia de a fi rădăcinile în progresie aritmetică .... 2 puncte
   Valoarea lui $a = 3$ .... 1 punct
   Rădăcinile ecuaţiei $-3, -1, 1$ .... 3 puncte
3. Demonstrarea relaţiilor $\underbrace{\sqrt[p]{x\sqrt[p]{x\ldots\sqrt[p]{x}}}}_{n \text{ radicali}} = x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}} = x^{\frac{1-\frac{1}{p^n}}{p-1}}$ .... 4 puncte
   Transformarea ecuaţiei iniţiale în $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1-\frac{1}{p^n}}{p-1}} = 2013$. .... 3 puncte
   Forma finală $x^{\frac{1}{p-1}} = 2013$. .... 2 puncte
   Soluţia $x = 2013^{p-1}$. .... 1 punct

II. .... 30 puncte

1. Ecuaţia cerută $(d)\ y = 3$ .... 5 puncte
2. Aria căutată (3) .... 8 puncte
3. $M\left(3\sqrt{3} - 1, 3\right)$ .... 7 puncte
4. Aflarea punctului $Q(0, 3)$ .... 10 puncte
   Se poate căuta punctul $Q(x, 3)$ pentru care suma distanţelor

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 2x + 10}$$

este minimă, de unde $x = 0$.

Se poate utiliza definiţia elipsei, din care rezultatul este imediat.

III. .... 30 puncte

1. $D = [0, +\infty)$ (2 p.), $D_c = (0, +\infty)$ (2 p.), $D_d = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ (4 p.); Total ... 8 puncte
2. f este crescătoare pe $[0, \frac{1}{3}]$ şi pe $[1, +\infty)$ şi descrescătoare pe $[\frac{1}{3}, 1]$ .... 4 puncte
   f este concavă pe $[0, 1]$ şi convexă pe $[1, +\infty)$; .... 6 puncte
   Puncte de extrem local: $x = \frac{1}{3}$ punct de maxim,
   $x = 0$ şi $x = 1$ puncte de minim local .... 3 puncte
   Punct de inflexiune $x = 1$ .... 2 puncte
   Punct unghiular $x = 1$ .... 2 puncte
3. Scrierea ariei .... 1 punct
   Calculul integralei $A = \frac{4}{15}$ .... 4 puncte