BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

AUFNAHMEPRÜFUNG, 21. Juli 2019
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIG ZU BEACHTEN:

1) Die Ankreuzaufgaben aus Teil A können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die vom Kandidaten auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angegeben werden müssen. Die Bewertung der Ankreuzaufgaben erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung angegebenen Benotungssystem.

2) Bei den Aufgaben aus Teil B müssen vollständige Lösungen auf dem Prüfungsblatt angegeben werden. Diese werden ausführlich nach den Bewertungshinweisen beurteilt.

Teil A

1. (6 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}.$$

Der Wert von S_{2019} beträgt

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{2019}{6059}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2018}{6059}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{2019}{6058}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2018}{6058}$.

2. (6 Punkte) Falls $\log_x(x^2+2x) + \log_{x^2}(x+2) = 4$ ist, dann kann x gleich

$\boxed{\text{A}}$ 2 sein; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{2}$ sein; $\boxed{\text{C}}$ 4 sein; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{2}$ sein.

3. (6 Punkte) Es seien $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ Matrizen mit reellen Elementen. Ist $AB = BA = O_2$ (die Nullmatrix aus $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), dann

$\boxed{\text{A}}$ gibt es kein solches B; $\boxed{\text{B}}$ ist B eindeutig bestimmt;
$\boxed{\text{C}}$ sind x, y, z gerade Zahlen; $\boxed{\text{D}}$ ist $\det B = 0$.

4. (6 Punkte) Im Ring $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ betrachte man die Gleichung $\hat{3}(x+\hat{2}) = \hat{9}$. Welche von den folgenden Aussagen über diese Gleichung sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Sie hat genau 4 Lösungen. $\boxed{\text{B}}$ Alle ihre Lösungen sind in $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ umkehrbar.
$\boxed{\text{C}}$ Sie hat genau 3 Lösungen. $\boxed{\text{D}}$ Sie hat hat keine Lösungen.

5. (6 Punkte) Es sei $\ell = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x}$. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ ℓ ist eine rationale Zahl. $\boxed{\text{B}}$ Der Grenzwert ℓ existiert nicht. $\boxed{\text{C}}$ $\ell = 1/3$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell = \infty$.

6. (6 Punkte) Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ Parameter, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b + e^{-x}, & \text{falls } x \le 0 \\ x^2, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

und $x_0 = 0$. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Es gibt unendlich viele Paare (a, b), für die f stetig im Punkt x_0 ist.
$\boxed{\text{B}}$ f ist im Punkt x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$ $(a = 1$ und $b = -2)$.
$\boxed{\text{C}}$ f ist im Punkt x_0 stetig $\Leftrightarrow$ $a + b = -1$.
$\boxed{\text{D}}$ f ist im Punkt x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$ $(a = -2$ und $b = 1)$.

7. (6 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$ definierte Funktion. Dann ist

$\boxed{\text{A}}$ die Funktion f fallend auf $(-\infty, 0]$ und wachsend auf $(0, +\infty)$;
$\boxed{\text{B}}$ 0 ein Wendepunkt der Funktion f;
$\boxed{\text{C}}$ die Funktion f streng wachsend auf $\mathbb{R}$;
$\boxed{\text{D}}$ die Funktion f konvex auf $\mathbb{R}$.

8. (6 Punkte) Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$ beträgt

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ π; $\boxed{\text{D}}$ 1.

9. (6 Punkte) Im Rhombus $ABCD$ sind $AB = 12$ und $m(\widehat{C}) = 60^\circ$. Dann beträgt die Summe $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

$\boxed{\text{A}}$ 72; $\boxed{\text{B}}$ $72\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $144\sqrt{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $72(1 + \sqrt{3})$.

10. (6 Punkte) Im Dreieck ABC sind $BC = a$, $m(\widehat{A}) = 30^\circ$ und $m(\widehat{B}) = 105^\circ$. Dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{a^2(\sqrt{3} - 1)}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{a^2(1 + \sqrt{3})}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{a^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

TEIL B

1. (10 Punkte) Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}}$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k}}$.

2. (10 Punkte) Im kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $A(2, -1)$, $B(4, 3)$ und die Gerade $d : x - 2y - 1 = 0$ gegeben.

(a) Man beweise, dass die Gerade d durch den Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ verläuft.

(b) Man bestimme die Punkte C, für die der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich 3 ist und eine von den Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC auf der Geraden d liegt.

3. (10 Punkte) Gegeben sei die Menge von Matrizen

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

wobei mit $\overline{z}$ die zu der komplexen Zahl z konjugierte Zahl bezeichnet wird.

(a) Man zeige, dass G eine Untergruppe der Gruppe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ ist.

(b) Man konstruiere einen injektiven Gruppenmorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ und $(G, +)$.

BEMERKUNGEN:
Alle Themen sind verpflichtend. Die Bewertung beginnt bei 10 Punkten.
Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden.

Antworten und Lösungen

TEIL A

Antworten zu den Aufgaben:

1. $\boxed{\text{C}}$; **2.** $\boxed{\text{A}}$; **3.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{C}}$; **5.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$;
6. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **7.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **8.** $\boxed{\text{D}}$; **9.** $\boxed{\text{A}}$; **10.** $\boxed{\text{B}}$.

Lösungen zu den Aufgaben:

1. Für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt die Gleichheit $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$, aus der sich für alle $n \in \mathbb{N}^*$

$$3S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} = 1 - \frac{1}{3n+1},$$

also $S_n = \frac{n}{3n+1}$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ergibt. Somit ist $S_{2019} = \frac{2019}{6058}$.

2. Die Bedingungen für die Existenz der Logarithmusfunktion führen zu $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Unter diesen Bedingungen ist die Gleichung äquivalent zu

$$\frac{1}{2}\log_x(x+2) + 1 + \log_x(x+2) = 4,$$

woraus $\log_x(x+2) = 2$, also $x^2 = x+2$, folgt. Also ist $x = 2$ die einzige Lösung.

3. Die Matrizengleichungen $AB = BA = O_2$ führen zu

$$\begin{pmatrix} 4-2y & 4x-2z \\ -2+y & -2x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2x & -2+x \\ 4y-2z & -2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Lösen der dazugehörigen Gleichungssysteme erhält man die einzige Lösung $x = 2$, $y = 2$ und $z = 4$, also ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Die Gleichung schreibt sich äquivalent wie folgt: $\hat{3}(x+\hat{2}) = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x + \hat{6} = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x - \hat{3} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{3}(x-\hat{1}) = \hat{0}$. Die letzte Gleichung gilt genau dann, wenn $x - \hat{1} \in \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$, also ist die Lösungsmenge $M = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$. Von diesen Lösungen ist $\hat{9}$ im Ring $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ nicht umkehrbar.

5. Durch Anwenden der Regel von l'Hôpital erhält man

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3\sin^2 x \cos^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3}.$$

6. Es gelten $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = a+b+1 = f(0)$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$. Also ist f genau dann stetig im Punkt $x_0 = 0$, wenn $a+b = -1$ ist. Somit gibt es unendlich viele Paare (a,b), für die f stetig in x_0 ist. Außerdem ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und

$$f'(x) = ae^x - e^{-x} \quad \text{für alle } x < 0\,,$$

$$f'(x) = 2x \quad \text{für alle } x > 0.$$

Es folgt sofort, dass $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = a-1$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = 0$ ist. Unter der Annahme, dass $a+b = -1$ (also, dass f stetig in 0) ist, ergibt eine Folgerung des Mittelwertsatzes von Lagrange, dass $f'_\ell(0) = a-1$ und $f'_r(0) = 0$ ist. Also ist f in $x_0 = 0$ genau dann differenzierbar, wenn $a+b = -1$ und $a-1 = 0$, also, wenn $a = 1$ und $b = -2$ ist.

7. Es ist $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x > 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$, und $f''(x) = x^2 e^x \geq 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

8. Mittels der Substitution $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ergibt sich

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t}\Big|_0^1 = 1.$$

9. Im Rhombus $ABCD$ ist $m(\widehat{BAD}) = 60°$ und die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander. Es sei O der Schnittpunkt der Diagonalen. Unter Zuhilfenahme der Definition des Skalarproduktes folgt nun

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD \cdot AB \cdot \cos(\widehat{BAD}) + AC \cdot BD \cdot \cos(\widehat{AOD}) = 12 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 72.$$

10. Es ist $m(\widehat{C}) = 180° - 30° - 105° = 45°$. Durch Anwendung des Sinussatzes im Dreieck ABC erhält man

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow c = a\sqrt{2}.$$

Somit ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}\cdot\sin(60°+45°) = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2(1+\sqrt{3})}{4}.$$

TEIL B

Lösungen zu den Aufgaben und Bewertungshinweise::

1. (a) Sei $a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

(**3 Punkte**) Dann ist

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{\sqrt{1+(k/n)^2}} = \sigma(f,\Delta_n,\xi_n),$$

wobei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ definierte Funktion, Δ_n die Zerlegung $\Delta_n = (0,\, 1/n,\, 2/n,\, \ldots,\, 1)$ des Intervalls $[0,1]$ und $\xi_n = (1/n,\, 2/n,\, \ldots,\, 1) \in P(\Delta_n)$ ist.

Bemerkung. Werden die Funktion, die Zerlegung sowie der Zwischenvektor nicht angegeben, so vergibt man nur 2 statt der 3 Punkte.

(**1 Punkt**) Aus $\|\Delta_n\| = 1/n \to 0$ für $n \to \infty$, folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ist.

Bemerkung. Wird nicht vermerkt, dass $\|\Delta_n\| = 1/n \to 0$ für $n \to \infty$, so vergibt man diesen Punkt nicht.

(**3 Punkte**) Es folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$ ist.

(b) Sei $b_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}}$. Es gelten

$$(\textbf{1 Punkt})\qquad b_n \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+1}}$$

und analog

$$(\textbf{1 Punkt})\qquad b_n \ge \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+n}}.$$

(**1 Punkt**) Aus $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+n}} = \dfrac{1}{2}$ ergibt nun das Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1/2$ ist.

2. (a) (**1 Punkt**) Der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ ist der Punkt $M(3,1)$.

(**1 Punkt**) Die Koordinaten des Punktes M genügen der Gleichung der Geraden $d:\ 3-2-1=0$.

(b) (**2 Punkte**) Weil die Gerade d eine Seitenhalbierende des Dreiecks ABC enthält und da die Koordinaten der Punkte A und B der Gleichung der Geraden d nicht genügen (oder berücksichtigend, dass d durch den Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ verläuft), erhält man, dass C auf der Geraden d liegt.

(**2 Punkte**) Es sei $C(c_1,c_2)$. Dann ist $c_1 - 2c_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 2c_2 + 1$.

(**2 Punkte**) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $\frac{1}{2}|\Delta| = 3$, mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2c_2+1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

(**1 Punkt**) Es folgt $|-6c_2+6| = 6 \Leftrightarrow |-c_2+1| = 1$, also $c_2 = 0$ oder $c_2 = 2$.
(**1 Punkt**) Somit sind die Koordinaten von C entweder $C(1,0)$ oder $C(5,2)$.

3. (a) (1 Punkt) Aus $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ folgt $G \neq \emptyset$.
Seien $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -\overline{z_4} & \overline{z_3} \end{pmatrix} \in G$. Dann gelten

$$\textbf{(3 Punkte)} \quad A + B = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\overline{z_2} - \overline{z_4} & \overline{z_1} + \overline{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\overline{z_2 + z_4} & \overline{z_1 + z_3} \end{pmatrix} \in G,$$

$$\textbf{(3 Punkte)} \quad -A = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & -\overline{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ -\overline{(-z_2)} & \overline{-z_1} \end{pmatrix} \in G.$$

Also ist G eine Untergruppe der Gruppe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$.

Bemerkung. Als alternative Lösung beachte man, dass die Menge G eine Untergruppe der Gruppe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ ist $\Leftrightarrow$ [$G \neq \emptyset$ und $A - B \in G$ für alle $A, B \in G$] $\Leftrightarrow$ [G ist abgeschlossen bezüglich $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ und $(G, +)$ ist eine Gruppe].

(b) (1 Punkt) Man definiere $f : \mathbb{C} \to G$ durch $f(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man beachte, dass $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} \in G$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist f wohldefiniert.
(1 Punkt) Überprüfen der Injektivität von f.
(1 Punkt) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

$$f(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1 + z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_2} \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2).$$

Also ist f ein Gruppenmorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ und $(G, +)$.

Bemerkung. Es können auch andere injektive Gruppenmorphismen zwischen den Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ und $(G, +)$ definiert werden, zum Beispiel $f(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\overline{z} & 0 \end{pmatrix}$ oder $f(z) = \begin{pmatrix} z & z \\ -\overline{z} & \overline{z} \end{pmatrix}$.