BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

AUFNAHMEPRÜFUNG, 12. September 2018
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIG ZU BEACHTEN:

1) Bei jeder Ankreuzaufgabe (aus Teil A) ist wenigstens eine Antwort richtig, es können jedoch auch mehrere wahr sein. Diese müssen vom Kandidaten auf dem Prüfungsblatt angegeben werden. Die der betreffenden Aufgabe entsprechenden Punkte werden genau dann vergeben, wenn alle richtigen Antworten und nur diese angegeben worden sind.

2) Bei den Aufgaben aus Teil B müssen vollständige Lösungen auf dem Prüfungsblatt angegeben werden. Diese werden ausführlich nach den Bewertungshinweisen beurteilt.

TEIL A

1. (5 Punkte) Der Durchschnitt mit der Ox Achse der grafischen Darstellung folgender Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2^{x^2} - 4, & \text{falls } x < 2 \\ x - 2, & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{A}}$ ist die leere Menge; $\boxed{\text{B}}$ ist eine Menge mit einem Element; $\boxed{\text{C}}$ ist eine Menge mit zwei Elementen; $\boxed{\text{D}}$ ist eine Menge mit drei Elementen; $\boxed{\text{E}}$ ist eine Menge mit vier Elementen.

2. (5 Punkte) Man betrachtet das Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen ist und $+$, $\cdot$ bezeichnen die üblichen Operationen der Addition und Multiplikation. Man gebe an, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

$\boxed{\text{A}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist eine Gruppe; $\boxed{\text{B}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Ring; $\boxed{\text{C}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper; $\boxed{\text{D}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Ring, der kein Körper ist; $\boxed{\text{E}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist kein Ring.

3. (5 Punkte) Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin^2 x)}{x \cdot \operatorname{tg}(2x)}$ ist

$\boxed{\text{A}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

4. (5 Punkte) In einem kartesischen Koordinatensystem xOy, betrachtet man ein gleichseitiges Dreieck OAB mit Seitenlänge ℓ, so dass der Punkt A auf der Geraden liegt, welche durch die Gleichung $x - \sqrt{3}y = 0$ gegeben ist. Der Punkt B kann folgende Koordinaten haben:

$\boxed{\text{A}}$ $(0, \ell)$; $\boxed{\text{B}}$ $\left(\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\ell}{2}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0, -\ell)$; $\boxed{\text{D}}$ $\left(-\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\ell}{2}\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $\left(-\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\ell}{2}\right)$.

5. (5 Punkte) Wenn $\cos\beta$ das geometrische Mittel der Zahlen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ist, wobei $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$, dann ist $\cos 2\beta$ gleich:

$\boxed{\text{A}}$ $-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

6. (5 Punkte) Man betrachtet die Funktion $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ f hat keine schiefe Asymptote; $\boxed{\text{B}}$ f hat genau einen Punkt als lokales Minimum; $\boxed{\text{C}}$ die Gleichung $f(x) = 3$ hat die Lösung $x = 1$; $\boxed{\text{D}}$ f ist monoton auf $\mathbb{R}^*$; $\boxed{\text{E}}$ f ist konvex auf $\mathbb{R}^*$.

TEIL B

1. a) (8 Punkte) Man bestimme alle Paare reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass sowohl ihre Summe als auch ihr Produkt gleich -2 ist.

b) (12 Punkte) Man bestimme den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & a & a & 1 \\ a & a^2 & 4 & 1 \\ a & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Diskussion in Abhängigkeit vom reellen Paramter a.

2. a) (8 Punkte) Seien P und Q die Mittelpunkte der Diagonalen $[AC]$, beziehungsweise $[BD]$ eines konvexen Viereckes $ABCD$.

1. Man beweise, dass $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right)$.
2. Wenn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{PQ}$, dann beweise man, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

b) (7 Punkte) Man beweise folgende Gleichheit:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$$

3. Seien a, b reelle Zahlen. Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

definiert.

a) (10 Punkte) Man bestimme die Zahlen a, b für welche f ableitbar ist und f' stetig ist.
b) (8 Punkte) Man bestimme die Stammfunktionen der Funktion f, falls diese existieren.
c) (7 Punkte) Man berechne das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ im Fall $a = 1$ und $b = -1$.

BEMERKUNGEN:
Alle Themen sind verpflichtend. Die Bewertung beginnt bei 10 Punkten.
Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden.