UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CONCURS DE ADMITERE, 17 iulie 2017
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)
1) (10 puncte) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, intersecţia

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\} \cap (-\infty, 0)$$

este vidă.

2) Considerăm legea de compoziţie $*$ definită pe $\mathbb{Q}$ prin

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

a) (15 puncte) Să se arate că $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu $*$ şi că $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$ este un grup abelian.
b) (5 puncte) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q} \setminus \{2\},\ f(x) = x + a$ să fie un izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ la $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$.
SUBIECTUL II (30 puncte)
1) (10 puncte) Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$$

situate în intervalul $(0, 2)$.
2) Într-un reper ortogonal xOy considerăm punctele $A(a, 0)$ şi $B(0, b)$. În triunghiul OAB fie H piciorul perpendicularei din O pe AB. În exteriorul triunghiului OAB se construiesc pătratele $OACD$ şi $OBEF$.
a) (10 puncte) Determinaţi ecuaţiile dreptelor AE şi BC.
b) (10 puncte) Demonstraţi că dreptele AE, BC şi OH sunt concurente.
SUBIECTUL III (30 puncte)
Considerăm funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia

$$f(x) = \frac{2}{\ln 5} \ln(1 + x) + \sqrt{x}, \quad \forall x \geq 0.$$

1) (10 puncte) Calculaţi f' şi demonstraţi că $4 \leq f(x) \leq x$, $\forall x \geq 4$.
2) (5 puncte) Demonstraţi că şirul definit prin relaţia $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ şi $x_0 \geq 4$ este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
3) (10 puncte) Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

4) (5 puncte) Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^4 f'(t) f(t)\, dt.$$

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem de corectare pentru proba de MATEMATICĂ
a concursului de admitere, 17 iulie 2017

SUBIECTUL I (30 puncte)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\}$ este mulţimea soluţiilor reale ale unei ecuaţii de gradul 2 pentru care $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2+1) = 8m$ .... 2 p
Dacă $m < 0$ atunci $A = \emptyset$ .... 2 p
Dacă $m \geq 0$ atunci cele 2 soluţii (posibil egale) ale ecuaţiei $(m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ sunt reale şi au acelaşi semn întrucât produsul lor este $\dfrac{1}{m^2+1} > 0$ .... 3 p
$m \geq 0 \ \Rightarrow \ m+1 > 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{2(m+1)}{m^2+1} > 0$, aşadar aceste soluţii sunt pozitive având suma pozitivă 2 p
Finalizare .... 1 p
2) a) Stabilitatea se rescrie astfel: $x, y \in \mathbb{Q}, \ x * y = 2 \Leftrightarrow x = 2$ sau $y = 2$, iar
$xy - 2x - 2y + 6 = 2 \Leftrightarrow 0 = xy - 2x - 2y + 4 = (x-2)(y-2) \Rightarrow x = 2$ sau $y = 2$ .... 3 p
Verificarea asociativităţii $*$ (pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$,
$x * (y * z) = (x * y) * z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$) .... 3 p
Verificarea comutativităţii $*$ .... 3 p
Luând pe $x = 0$ în $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ obţinem $e = 3$, prin urmare, dacă există element neutru, acesta este $e = 3$ .... 2 p
Verificarea faptului că $x * 3 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ pentru finalizarea demonstraţiei existenţei elementului neutru .... 1 p
Toate elementele din $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ sunt simetrizabile în raport cu $*$: dacă $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$,
$x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x-2)x' = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x-3}{x-2}$
care aparţine mulţimii $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ .... 3 p
b) f funcţie bijectivă $\Leftrightarrow$ ($x + a = 2$ atunci şi numai atunci când $x = 0$) $\Leftrightarrow$ $a = 2$ .... 3 p
Verificarea faptului că f este morfism .... 2 p
$f(x) * f(y) = (x+2) * (y+2) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6 = xy + 2 = f(xy)$

SUBIECTUL II (30 puncte)

Problema 1

(i) Ecuaţia este echivalentă cu $\cos 12x - \cos 14x = 0$ .... 3 p

(ii) Ecuaţia de la punctul precedent este echivalentă cu $\sin 13x \cdot \sin x = 0$. .... 3 p

(iii) Soluţia generală a ecuaţiei de la (ii) este $S = \underbrace{\left\{\dfrac{\pi}{13}k, \ k \in \mathbb{Z}\right\}}_{S_1} \bigcup \underbrace{\{n\pi, \ n \in \mathbb{Z}\}}_{S_2}$ .... 1 p

(iv) $S_2 \cap (0, 2) = \emptyset$ .... 1 p

(v) $0 < \dfrac{\pi}{13}k < 2$, deci $0 < k < \dfrac{26}{\pi}$. .... 1 p

(vi) $x = \dfrac{\pi}{13}, \dfrac{2\pi}{13}, \dfrac{3\pi}{13}, \dfrac{4\pi}{13}, \dfrac{5\pi}{13}, \dfrac{6\pi}{13}, \dfrac{7\pi}{13}, \dfrac{8\pi}{13}$. .... 1 p

Problema 2

Notăm cu P punctul de intersecţie dintre dreptele AE şi BC.

a)

(i) $C(a, -a), E(-b, b)$ .... 2 p

(ii) Ecuaţia dreptei AE este $bx + (a+b)y - ab = 0$ .... 4 p

(iii) Ecuaţia dreptei BC este $(a+b)x + ay - ab = 0$ .... 4 p

b)

(i) Punctul P are coordonatele $P\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2+ab}, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2+ab}\right)$ .... 3 p

(ii) Panta dreptei AB este $k_{AB} = -\dfrac{b}{a}$ .... 2 p

(iii) Panta dreptei OH este $k_{AB} = \dfrac{a}{b}$ .... 2 p

(iv) ecuaţia dreptei OH este $y = \dfrac{a}{b}x$ .... 2 p

(v) punctul P aparţine dreptei OH .... 1 p

SUBIECTUL III (30 puncte)

1) $f'(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pe $(0, \infty)$ .... 2 p

$f(4) = 4$ .... 1 p

f crescătoare, deci $f(x) \geq f(4) = 4$ pentru $x \geq 4$ .... 2 p

$g : [4, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. .... 1 p

$g'(x) = f'(x) - 1$, şi $g''(x) = f''(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \geq 4$. .... 2 p

$g'(4) = \frac{2}{5\ln 5} - \frac{3}{4} < 0$, deci $g'(x) < 0$, $\forall x \geq 4$ .... 1 p

$g(4) = 0$, deci $g(x) \leq 0$, $\forall x \geq 4$. .... 1 p

2) Demonstrarea prin inducţie matematică a inegalitatăţii $x_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$ .... 2 p

$x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător .... 1 p

$l \geq 4$ .... 1 p

$l = f(l) \Rightarrow l = 4$. .... 1 p

3) $f(0) = 0$, şi f este continuă în 0, deci avem o nedeterminare de tipul 1^∞. .... 1 p

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{\sqrt{x}}}$ .... 3 p

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \cdot 1 \cdot 0 = 1$ .... 4 p

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e$ .... 2 p

4) $f'(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2}(f^2)'(x)$ .... 2 p

$\int\limits_x^4 f'(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2}f^2(t)\Big|_x^4 = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(x)$. .... 2 p

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int\limits_x^4 f'(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(0) = 8$ .... 1 p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

SOLUŢII
CONCURS DE ADMITERE, 17 iulie 2017
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\}$ este mulţimea soluţiilor reale ale unei ecuaţii de gradul 2 pentru care $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2+1) = 8m$. Dacă $m < 0$, atunci ecuaţia nu are rădăcini reale, deci $A = \emptyset$. Dacă $m \geq 0$, atunci cele 2 soluţii (posibil egale) ale ecuaţiei $(m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ sunt reale şi au acelaşi semn întrucât produsul lor este $\dfrac{1}{m^2+1} > 0$. Din condiţia $m \geq 0$ rezultă $m + 1 > 0$, deci $x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+1)}{m^2+1} > 0$. Aşadar aceste soluţii sunt pozitive, deci interecţia este vidă şi în acest caz.

2) a) Pentru a demonstra stabilitatea este suficient să demonstrăm $x, y \in \mathbb{Q}$, $x * y = 2 \Leftrightarrow x = 2$ sau $y = 2$. Din relaţia $x * y = 2$ obţinem $xy - 2x - 2y + 6 = 2$, adică $0 = xy - 2x - 2y + 4 = (x-2)(y-2)$, deci $x = 2$ sau $y = 2$.

Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ avem $x * (y * z) = (x * y) * z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$. Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ avem $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = y = 2y = 2x + 6 = y * x$, deci operaţia este comutativă. Luând pe $x = 0$ în $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ obţinem $e = 3$, prin urmare, dacă există element neutru, acesta este $e = 3$. Pe de altă parte $x * 3 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, deci $e = 3$ este element neutru. Pentru orice $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ $x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x-2)x' = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x-3}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2} \neq 2$, care există şi aparţine mulţimii $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$. b) f funcţie bijectivă $\Leftrightarrow$ $(x + a = 2$ atunci şi numai atunci când $x = 0)$ $\Leftrightarrow$ $a = 2$. Pentru $a = 2$ avem $f(x) * f(y) = (x+2) * (y+2) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6 = xy + 2 = f(xy)$, deci f este morfism. În consecinţă valoarea lui a pentru care f este izomorfism este $a = 2$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1) Ecuaţia se poate scrie
$$\frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 14x + \cos 4x)$$
sau
$$\cos 12x - \cos 14x = 0,$$
de unde
$$\sin 13x \cdot \sin x = 0.$$
Rezolvând această ecuaţie, obţinem
$$x = \frac{\pi}{13}k,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$
Este clar că cea de-a doua familie de soluţii este inclusă în prima, deci putem spune că soluţia generală a ecuaţiei este
$$x = \frac{\pi}{13}k,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Pentru a obţine soluţiile ce verifică cerinţa problemei, trebuie să punem condiţia
$$0 < \frac{\pi}{13}k < 2,$$
de unde
$$0 < k < \frac{26}{\pi}.$$

k trebuind să fie un număr întreg, obţinem $k = 1, \ldots, 8$, deci soluţiile acceptabile sunt:

$$x = \frac{\pi}{13}, \frac{2\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \frac{4\pi}{13}, \frac{5\pi}{13}, \frac{6\pi}{13}, \frac{7\pi}{13}, \frac{8\pi}{13}.$$

2) Coordonatele punctelor care ne interesează sunt, după cum e uşor de constatat, următoarele: $C(a, -a), E(-b, b)$. Dreapta AE are ecuaţia

$$bx + (a + b)y - ab = 0,$$

în timp ce dreapta BC are ecuaţia

$$(a + b)x + ay - ab = 0.$$

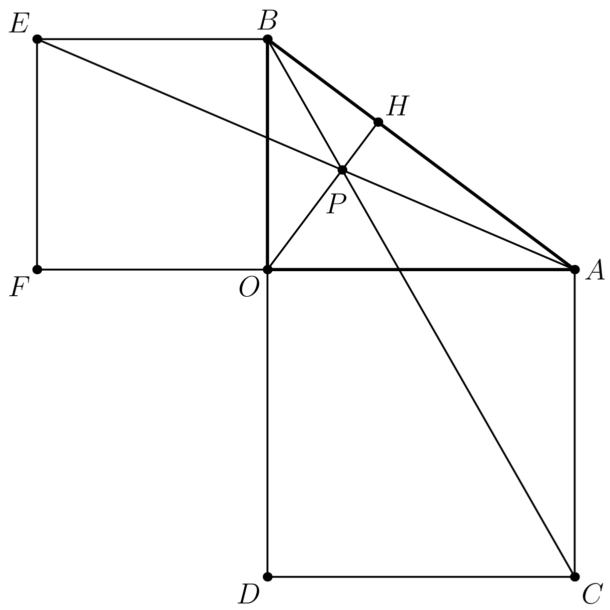
Fie P punctul de intersecţie a dreptelor AE şi BC. Atunci coordonatele lui P sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} bx + (a + b)y - ab = 0, \\ (a + b)x + ay - ab = 0, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la

$$P = P\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2 + ab}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2 + ab}\right).$$

Tot ce mai avem de făcut este să demonstrăm că dreapta OH trece prin punctul P.



Panta dreptei AB este $k_{AB} = -\frac{b}{a}$, ceea ce înseamnă că panta dreptei OH, care este perpendiculară pe AB, $k_{OH} = \frac{a}{b}$, deci ecuaţia dreptei OH este

$$y = \frac{a}{b}x.$$

Este uşor de constatat că punctul P aparţine dreptei OH (coordonatele sale verifică ecuaţia dreptei).

SUBIECTUL III (30 puncte)

1) Calculăm derivata funcţiei:

$$f'(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pentru $x > 0$ avem $f'(x) > 0$, deci funcţia f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Pe de altă parte $f(4) = 4$, deci din faptul că f este strict crescă toare rezultă $f(x) > f(4) = 4$ pentru $x > 4$, deci $f(x) \geq 4$, $\forall x \geq 4$.

Pentru cea de a doua inegalitate considerăm funcţia $g : [4, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. $g'(x) = f'(x) - 1$, şi $g''(x) = f''(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \geq 4$. Astfel g' este strict descrescătoare. Însă $g'(4) = \frac{2}{5\ln 5} - \frac{3}{4} < 0$ deoarece $\ln 5 > 1$, deci $g'(x) < 0$, $\forall x \geq 4$ şi g este strict descrescătoare. Pe de altă parte $g(4) = 0$, deci $g(x) \leq 0$, $\forall x \geq 4$. Această inegalitate este echivalentă cu $f(x) \leq x \, \forall x \geq 4$.
2) Demonstrăm prin inducţie matematică inegalitatea $x_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ inegalitatea este adevărată datorită condiţiei din enunţ. Dacă $x_k \geq 4$, atunci $x_{k+1} = f(x_k) \geq 4$ datorită inegalităţii $f(x) \geq 4$, $\forall x \geq 4$. Astfel pe baza principiului inducţiei matematice avem $x_n \in [0, \infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Folosind a doua inegalitate de la 1) deducem $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi mărginit inferior, adică convergent. Fie l limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Din inegalitatea $x_n \geq 4, \forall n \geq 0$ prin trecere la limită obţinem $l \geq 4$, iar prin trecere la limită în relaţia de recurenţă obţinem $l = f(l)$. Astfel folosind 1) deducem $l = 4$.
3) $f(0) = 0$, şi f este continuă în 0, deci avem o nedeterminare de tipul 1^∞ şi putem folosi limita $\lim\limits_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$ (cu $y = f(x)$).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left[(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{\sqrt{x}}},$$

deci avem de calculat $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(1 + x)}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \cdot 1 \cdot 0 = 1,$$

deci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e.$$

4) $f'(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2}(f^2)'(x)$, deci $\int\limits_x^4 f'(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2}f^2(t)\Big|_x^4 = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(x)$. Astfel limita cerută este

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \int_x^4 f'(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(0) = 8.$$