UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CONCURS DE ADMITERE, 22 iulie 2016
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)

1) (6 puncte) Câte numere naturale de 3 cifre se pot forma astfel încât în fiecare număr toate cifrele să fie distincte?

2) Fie polinomul $f = X^4 + \alpha X^2 + \alpha + \widehat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

a) (8 puncte) Să se determine $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ pentru care f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3$.

b) (8 puncte) Arătaţi că polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}_3$.

3) (8 puncte) Demonstraţi că propoziţia matematică

$$P(n) : n^3 + 5n \text{ se divide cu } 6$$

este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1) (15 puncte) Se dau dreptele

$$(d_1) : 3x - 4y + 6 = 0 \text{ şi}$$
$$(d_2) : 4x - 3y - 9 = 0.$$

Fie M şi N punctele în care dreapta de ecuaţie $y = -x + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) intersectează dreptele d_1, respectiv d_2. Aflaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $MN = 5\sqrt{2}$.

2) a) (8 puncte) Arătaţi că

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

b)(7 puncte) Rezolvaţi ecuaţia

$$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}.$$

SUBIECTUL III (30 puncte)

Considerăm funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}, \quad \forall x \in D,$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

1) (4 puncte) Determinaţi mulţimea D.

2) (4 puncte) Calculaţi $f'(x)$, dacă $x \in D$.

3) (4 puncte) Determinaţi asimptotele funcţiei f.

4) (8 puncte) Alcătuiţi tabelul de variaţie al funcţiei f şi determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

5) (4 puncte) Determinaţi constantele A şi B astfel încât relaţia

$$f(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$$

să fie adevărată pentru orice $x \in D$.

6) (6 puncte) Arătaţi că $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} f(x)dx = -3\ln 2$.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem de corectare pentru proba de MATEMATICĂ
a concursului de admitere, 22 iulie 2016

SUBIECTUL I (30 puncte)

1) *Soluţia 1:*
Fiind nenulă, cifra sutelor poate fi aleasă în $10 - 1 = 9$ moduri .... 1 p
Odată aleasă cifra sutelor,
cifra zecilor poate fi oricare dintre cele $10 - 1 = 9$ cifre rămase disponibile .... 2 p
Odata fixate primele 2 cifre,
rămân $10 - 2 = 8$ posibilităţi de a alege cifra unităţilor .... 2 p
Prin urmare, se pot forma $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ numere .... 1 p
Soluţia 2:
Fiecare număr de 3 cifre distincte corespunde (bijectiv) unei submulţimi ordonate cu 3 elemente diferite (aranjament de 10 luate câte 3) care nu are pe 0 prim element .... 1 p
Numărul aranjamentelor de 10 luate câte 3 este $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$, ... 1 p
iar aranjamentele de 10 luate câte 3 care încep cu 0 corespund (bijectiv) perechilor de cifre nenule cu componentele diferite, ... 1 p
prin urmare numărul lor este $A_9^2 = 9 \cdot 8$ .... 1 p
Deci numărul căutat este $A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = (10 - 1) \cdot 9 \cdot 8 = 648$ .... 2 p

2) a) f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$ dacă şi numai dacă
$f(\widehat{0}) = \widehat{0}$ sau $f(\widehat{1}) = \widehat{0}$ sau $f(\widehat{2}) = \widehat{0}$ .... 2 p
$f(\widehat{0}) = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha + \widehat{2} = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha = -\widehat{2} = \widehat{1}$ .... 1 p
$f(\widehat{1}) = \widehat{1} + \alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{2}\alpha$ .... 1 p
$f(\widehat{2}) = \widehat{16} + \widehat{4}\alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{1} + \alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{2}\alpha$ .... 1 p
Prin urmare, $f(\widehat{1}) = \widehat{0}$ şi $f(\widehat{2}) = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{2}\alpha = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha = \widehat{0}$ .... 1 p
Concluzie $\alpha \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ .... 1 p
b) $\alpha = \widehat{0} \Rightarrow f = X^4 + \widehat{2} \Rightarrow f(\widehat{1}) = \widehat{0} \Rightarrow f$ are rădăcină în $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow f$ reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ .... 3 p
$\alpha = \widehat{1} \Rightarrow f = X^4 + X^2 \Rightarrow f(\widehat{0}) = \widehat{0} \Rightarrow f$ are rădăcină în $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow f$ reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ .... 3 p
$\alpha = \widehat{2} \Rightarrow f = X^4 + \widehat{2}X^2 + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$ rezultă că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ .... 2 p

3) *Soluţia 1:* Prin inducţie matematică.
Etapa verificării .... 1 p
Etapa demonstraţiei:
Scrierea propoziţiei $P(n + 1)$ .... 2 p
Demonstraţia propoziţiei $P(n + 1)$ .... 5 p

Soluţia 2: $n^3 + 5n = n^3 - n + 6n$ .... 2 p
$n^3 - n + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$ .... 2 p
2 şi 3 divid pe $(n - 1)n(n + 1)$ .... 3 p
Concluzia .... 1 p

SUBIECTUL II (30 puncte)

1.

(i) intersecţia cu prima dreaptă dată: $M\left(\dfrac{4\lambda - 6}{7}, \dfrac{3\lambda + 6}{7}\right)$ .... 3 p

(ii) intersecţia cu a doua dreaptă dată: $N\left(\dfrac{3\lambda + 9}{7}, \dfrac{4\lambda - 9}{7}\right)$ .... 3 p

(iii) distanţa $MN = \dfrac{\sqrt{2}}{7}|\lambda - 15|$ .... 3 p

(iv) ecuaţia $MN \equiv \dfrac{\sqrt{2}}{7}|\lambda - 15| = 5\sqrt{2}$ .... 2 p

(v) soluţia $\lambda_1 = 50$ .... 2 p

(vi) soluţia $\lambda_2 = -20$ .... 2 p

2. a) *Soluţia 1:* Folosind analiza matematică.
$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. .... 2 p
$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, $\forall x \in (-1, 1)$ .... 2 p
$f(x) = c$ pe $(-1, 1)$ .... 1 p
$c = \frac{\pi}{2}$ .... 2 p
cazul $x = 1$ şi $x = -1$ .... 1 p

Soluţia 2: Folosind elemente de trigonometrie.
$\alpha = \arccos x$, atunci $\cos\alpha = x$ şi $\alpha \in [0, \pi]$ .... 2 p
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = x$ .... 2 p
$\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .... 2 p
$\frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x$ .... 2 p

b) Adunarea membru cu membru a relaţiei de la a) cu cea din enunţ .... 3 p
ecuaţia $\arccos x = \frac{\pi}{3}$ .... 2 p
soluţia $x = \frac{1}{2}$ .... 2 p

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ (sau $D = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$) .... 4 p

2. $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 - 3x + 2) - x \cdot (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \dfrac{2 - x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$ .... 4 p

3. $y = 0$ asimptotă orizontală la $\pm\infty$ .... 2 p
   $x = 1$ asimptotă verticală .... 1 p
   $x = 2$ asimptotă verticală .... 1 p

4. Realizarea tabelului de variaţie .... 6 p
   f este descrescătoare pe intervalele $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, 2)$ respectiv $(2, \infty)$ .... 1 p
   f este crescătoare pe intervalele $[-\sqrt{2}, 1)$, $(1, \sqrt{2}]$ .... 1 p

5. $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{(A+B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}$ .... 1 p
   $-2A = B$ şi $A + B = 1$ .... 1 p
   $A = -1$ şi $B = 2$ .... 2 p

6. $I = \displaystyle\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} f(x)dx = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right) dx = -\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x-1}dx + 2\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x-2}dx$ .... 2 p
   $I = \ -\ln(x-1)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} + \ 2\ln(2-x)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}$ .... 2 p
   $I = -\ln\frac{2}{3} + \ln\frac{1}{3} + 2\ln\frac{1}{3} - 2\ln\frac{2}{3} = 3\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{2}{3}\right) = 3\ln\frac{1}{2} = -3\ln 2.$ .... 2 p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

SOLUŢII
CONCURS DE ADMITERE, 22 iulie 2016
Proba scrisă la MATEMATICĂ

SUBIECTUL I (30 puncte)
1) *Soluţia 1:*
Cifrele $0, 1, \ldots, 9$ sunt în număr de 10. Fiind nenulă, cifra sutelor poate fi aleasă în $10 - 1 = 9$ moduri. Odată aleasă cifra sutelor, cifra zecilor poate fi oricare dintre cele $10 - 1 = 9$ cifre rămase disponibile. Odata fixate primele 2 cifre, rămân $10 - 2 = 8$ posibilităţi de a alege cifra unităţilor. Prin urmare, se pot forma $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ numere.

Soluţia 2:
Fiecare număr de 3 cifre distincte corespunde (bijectiv) unei submulţimi ordonate cu 3 elemente diferite (aranjament de 10 luate câte 3) care nu are pe 0 prim element. Numărul aranjamentelor de 10 luate câte 3 este $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$, iar aranjamentele de 10 luate câte 3 care încep cu 0 corespund (bijectiv) perechilor de cifre nenule cu componentele diferite, prin urmare numărul lor este $A_9^2 = 9 \cdot 8$. Deci numărul căutat este $A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = (10 - 1) \cdot 9 \cdot 8 = 648$.
2) *Soluţia 1:* a) f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$ dacă şi numai dacă $f(\widehat{0}) = \widehat{0}$ sau $f(\widehat{1}) = \widehat{0}$ sau $f(\widehat{2}) = \widehat{0}$.

$$f(\widehat{0}) = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha + \widehat{2} = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha = -\widehat{2} = \widehat{1}$$

$$f(\widehat{1}) = \widehat{1} + \alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{2}\alpha$$

$$f(\widehat{2}) = \widehat{16} + \widehat{4}\alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{1} + \alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{2}\alpha$$

Prin urmare, $f(\widehat{1}) = \widehat{0} \Leftrightarrow f(\widehat{2}) = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{2}\alpha = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha = \widehat{0}$, deci $\alpha \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$.

b) Dacă $\alpha \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ atunci f are rădăcină în $\mathbb{Z}_3$, rezultă că f este reductibil.

$\alpha = \widehat{2} \Rightarrow f = X^4 + \widehat{2}X^2 + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2 \Rightarrow f$ este reductibil şi în acest caz.

Soluţia 2 (cele două subpuncte sunt rezolvate simultan):

$\alpha \in \mathbb{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$. $\alpha = \widehat{0} \Rightarrow f = X^4 + \widehat{2} \Rightarrow f(\widehat{1}) = \widehat{0} \Rightarrow f$ are rădăcină în $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow f$ reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

$\alpha = \widehat{1} \Rightarrow f = X^4 + X^2 \Rightarrow f(\widehat{0}) = \widehat{0} \Rightarrow f$ are rădăcină în $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow f$ reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

$\alpha = \widehat{2} \Rightarrow f = X^4 + \widehat{2}X^2 + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$ rezultă că f este reductibil. În acest caz, $f(\widehat{0}) = f(\widehat{1}) = f(\widehat{2}) = \widehat{1} \Rightarrow f$ nu are nici o rădăcină în $\mathbb{Z}_3$, deci răspunsul la prima întrebare este $\alpha \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$.
3) *Soluţia 1:*
Pentru $n = 0$, $6|0$ şi afirmaţia este adevărată. Considerăm $n \in \mathbb{N}$ şi presupunem prin inducţie că $6|n^3 + 5n$.

$$(n + 1)^3 + 5(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 3n(n + 1) + 6.$$

$2|n(n+1)$ (fiind produs de numere naturale consecutive) deci $6|3n(n+1)$. $6|n^3+5n$ (ipoteza inducţiei), $6|3n(n + 1)$, $6|6$, deci şi suma acestor numere este divizibil cu 6, adică $6|(n^3 + 5n) + 3n(n + 1) + 6$. Conform principiului inducţiei matematice $6|n^3 + 5n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluţia 2:
$n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$. $(n - 1)n(n + 1)$ se divide cu 6 deoarece printre 3 numere consecutive există unul divizibil cu 3, unul divizibil cu 2 şi 2 este relativ prim cu 3, deci produsul $(n - 1)n(n + 1)$ se divide cu $2 \cdot 3 = 6$. $6n$ este divizibil cu 6, deci suma $(n - 1)n(n + 1) + 6n = n^3 + 5n$ se divide cu 6.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Dacă intersectăm dreapta de ecuaţie $y = -x + \lambda$ cu prima dreaptă din problemă, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ y = -x + \lambda \end{cases}$$

cu soluţia $M\left(\frac{4\lambda - 6}{7}, \frac{3\lambda + 6}{7}\right)$. Dacă intersectăm dreapta de ecuaţie $y = -x + \lambda$ cu a doua dreaptă din enunţ, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 4x - 3y - 9 = 0 \\ y = -x + \lambda \end{cases}$$

cu soluţia $N\left(\frac{3\lambda + 9}{7}, \frac{4\lambda - 9}{7}\right)$. Distanţa dintre punctele M şi N este dată de lungimea vectorului $\overrightarrow{MN}\left(\frac{-\lambda + 15}{7}, \frac{\lambda - 15}{7}\right) = \frac{\lambda - 15}{7}(-1, 1)$. Prin urmare, distanţa dintre cele două puncte este

$$MN = \frac{\sqrt{2}}{7}|\lambda - 15|.$$

Avem, prin urmare, de rezolvat ecuaţia

$$|\lambda - 15| = 35,$$

ceea ce ne conduce la $\lambda_1 = 50$ şi $\lambda_2 = -20$. □

2. a) Considerăm funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. f este derivabilă pe $(-1, 1)$ şi

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

deci funcţia este constantă pe $(-1, 1)$. $f(0) = \frac{\pi}{2}$, deci $f(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice $x \in (-1, 1)$. Pentru $x = 1$ avem $f(1) = \arccos 1 + \arcsin 1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ şi pentru $x = -1$, avem $f(-1) = \arccos(-1) + \arcsin(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Astfel $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$.

Soluţia 2: Dacă notăm $\alpha = \arccos x$, atunci $\cos\alpha = x$ şi $\alpha \in [0, \pi]$. Astfel

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = x$$

şi din relaţia $\alpha \in [0, \pi]$ rezultă

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

deci aplicând arcsin în ambii membri ai egalităţii precedente obţinem $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x$, adică egalitatea dorită.

b) Dacă adunăm membru cu membru a relaţia de la a) cu cea din enunţ obţinem ecuaţia

$$2\arccos x = \frac{2\pi}{3},$$

adică

$$\arccos x = \frac{\pi}{3},$$

de unde rezultă soluţia $x = \frac{1}{2}$.

□

SUBIECTUL III (30 puncte)

Soluţie. 1. Pentru ca funcţia f să fie corect definită $f(x)$ trebuie să aibă sens şi să fie un număr real pentru orice $x \in D$. Fracţia $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ are sens pentru toate valorile reale x pentru care $x^2-3x+2 \neq 0$. Soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+2=0$ sunt $x_1=1$ şi $x_2=2$ ($\Delta = 3^2-4\cdot 2 = 1$ şi $x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}$), deci $D=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ (sau $D=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$).

2. Dacă $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, atunci pentru a calcula $f'(x)$ se poate aplica formula de derivare a unei fracţii şi astfel obţinem

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-3x+2)-x\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{2-x^2}{(x^2-3x+2)^2}$$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-3x+2} = 0$, deoarece la numitor avem o funcţie polinomială de grad 2 pe când la numărător o funcţie polinomială de grad 1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

deci $x=1$ şi $x=2$ sunt asimptote verticale şi $y=0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$.

4. Alcătuim tabelul de variaţie folosind prima derivată.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		2		∞
$2-x^2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x^2-3x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	$-3+2\sqrt{2}$	$\searrow$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4+3\sqrt{2})}{-2} = -\frac{1}{2}(6+4\sqrt{2}) = -(3+2\sqrt{2}) = -(1+\sqrt{2})^2,$$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = -3+2\sqrt{2}.$$

Folosind tabelul de variaţie deducem că funcţia f este descrescătoare pe intervalele $(-\infty,-\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2},2)$ respectiv $(2,\infty)$ şi este crescătoare pe intervalele $[-\sqrt{2},1)$, $(1,\sqrt{2}]$.

5. Prin aducere la numitor comun în membrul drept obţinem

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{x^2-3x+2},$$

deci $x=(A+B)x-2A-B, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$. Pentru $x=0$ obţinem $-2A=B$ şi pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$ deducem $A+B=1$. Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii obţinute pentru A şi B, obţinem $A=-1$ şi $B=2$, deci

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}, \forall x \in D.$$

Observaţie. Argumentarea, sau modul de calcul poate fi diferit, constantele se pot obţine înmulţind cu $(x-1)$, respectiv $(x-2)$ şi trecând la limită în relaţiile obcţinute ($x \to 1$, respectiv $x \to 2$), sau pur şi simplu observând descompunerea $x = 2(x-1) - (x-2)$, etc.

6. Folosind rezultatul precedent şi faptul că $\left\{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\} \subset (1,2)$, obţinem

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} f(x)dx = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right) dx = -\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x-1} dx + 2\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= \; -\ln(x-1)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} + \; 2\ln(2-x)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} = -\ln\frac{2}{3} + \ln\frac{1}{3} + 2\ln\frac{1}{3} - 2\ln\frac{2}{3} = 3\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{2}{3}\right) =$$

$$= 3\ln\frac{1}{2} = -3\ln 2.$$

□