

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

I.

Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\frac{1}{h}}{1+\frac{1}{h}}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} \right]; x \neq 0$ c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x+h) - \sin^2 x}{h}$
 d) $\lim_{h \rightarrow 0} (\cos h)^{\frac{1}{h^2}}$

II.

Oldjuk meg:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1+2^x) \ln(1+\frac{3}{x}))$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a}}{x}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$
 h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 3x - \sin 3x}{tg 2x - \sin 2x}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{tg^2 \frac{x}{2}}$

III.

Számítsd ki:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{(1+\cos x)}}{x-\pi}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[7]{(3+x)^4-1}}{x+2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x + \arctg 2x + \dots + \arctg nx}{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \dots + \ln(1+mx)}$ e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x-3}$
 f) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(ex))^{\frac{1}{\sin \pi x}}$ g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ h) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$
 i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg 2x}$ j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{\frac{1}{4x-\pi}}$

IV.

1. Az alábbi f és g függvényekre, határozzátok meg, hogy létezik-e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ és vizsgáljátok, hogy alkalmazható-e a l'Hospital szabály!

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ és $g(x) = \sin x ; x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}$ és $g(x) = \ln(1+2x)$

2. Az alábbi $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre, határozzátok meg, hogy létezik-e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ és vizsgáljátok, hogy alkalmazható-e a l'Hospital szabály!

a) $f(x) = 2x + \sin x$ és $g(x) = 2x - \sin x$

b) $f(x) = e^x - e^{-x}$ és $g(x) = e^x + e^{-x}$

3. Ha $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, egy deriválható függvény, f' folytonos, $f(0) = 1$ és $f(x) > 0$ bármely $x \in (-a, a)$ esetén igazoljuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}$$

4. Legyen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{2^x + 3^x + 4^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$. Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(BBTE, Felvételi, 1996)

5. Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$ határértéket.

(UTCN, Profil Architectura, 1996)

6. Tekintsük az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt.

a) Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ értéket.

b) Tanulmányozzuk az f függvény monotonitását és konvexitását.

(BBTE, Felvételi, 1992)

7. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Igazoljuk, hogy létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $\sin \alpha x + \cos \beta x > 0$, bármely $x \in (-\delta, \delta)$ esetén.

b) Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin \alpha x + \cos \beta x)^{\frac{1}{x}}$.

(BBTE, Felvételi, 1994)

8. Bizonyítsuk be, hogy az $f_n(x) = \sin^n nx$ összefüggéssel értelmezett $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek egyetlen $x_n \in (0, \frac{\pi}{2n})$ inflexiós pontja van minden $n \geq 2$ természetes szám esetén. Számítsuk ki a

$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ határértékeket.

(BBTE, Felvételi, 1996)

V.

A l'Hospital szabály segítségével számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{e^\pi e^x e^{\sin x} - 1}{x + \pi + \sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{\ln(1-x)}{\ln \cos \frac{\pi x}{2}}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} (1 - 4^x)^x$