Vektoralgebra feladatlap

2018 január 20.

1. Adott az $ABCD$ tetraéder, határozzuk meg:

   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$

   b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$

   c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$

2. Adott az $ABCD$ tetraéder. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$, majd bizonyítsuk be, hogy ez igaz bármely négy pontra a térből.

3. Egy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2a, a)$ és $B(2b, b)$ pontok, ahol $a \neq b$ valós paraméterek. Határozzuk meg az $M(x, y)$ pontot, ha teljesül az $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$

4. A síkban felvett Oxy derékszögű koordináta-rendszerben adottak $A(0, 8)$, $B(-4, 0)$, $C(6, 0)$, $H(0, 3)$ pontok. Legyen O az ABC háromszög köré írt kör középpontja. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH}$ vektorokat az Ox és Oy tengelyek $\vec{i}$, illetve $\vec{j}$ egységvektorainak függvényében, és mutassuk ki, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

5. Az ABC háromszögben jelöljük M-mel a BC felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

6. Az OAB háromszögben az AB-t k arányban osztó M pontra igaz, hogy $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k \cdot \overrightarrow{OB}}{1 - k}$

7. Legyen ABC egy általános háromszög és G az ABC háromszög súlyponja. Ha O egy tetszőleges pont a térben, akkor bizonyítsuk be, hogy:

   a) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

   b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

8. Legyen O az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja. Az OAB, OBC, OCD és OAD háromszögek súlyponját rendre G, H, I és K jelöli. Igazoljuk, hogy $GHIK$ paralelogramma.

9. Legyen ABC egy általános háromszög, H a háromszög magasságpontja, O a háromszög köré írt kör középontja és A' az A-nak átmérősen ellentett pontja, illetve G a háromszög súlyponja. Mutassuk ki, hogy:

   a) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'}$

   b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

   c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

   d) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$

   e) a H, G, O pontok kollineárisak (Euler féle egyenes) és $2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HG}$

10. Adott az $ABCD$ paralelogramma, valamint a P, Q, R, S pontok, amelyeket az $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CR} = k \cdot \overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{DS} = k \cdot \overrightarrow{DA}$ egyenlőségek határoznak meg, $k \in \mathbb{R}^*$.

    a) Készítsük el a rajzot $k = -1$ esetén.

    b) Igazoljuk, hogy $PQRS$ paralelogramma, $\forall k \in \mathbb{R}^*$ esetén.

11. Adott $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ sokszög az O középpontú körben. Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.

12. Az ABC háromszög síkjában felvesszük a P, Q pontokat, úgy hogy: $\overrightarrow{PC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

   a) Fejezzük ki a $\overrightarrow{PQ}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok függvényében.

   b) Bizonyítsuk be, hogy a P, Q pontok és az AB oldal C' felezőpontja egy egyenesen vannak.

13. Adott egy ABC háromszög. Tudjuk, hogy $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}$, $\overrightarrow{EE_1} = 3\overrightarrow{BE}$, illetve $\overrightarrow{DD_1} = 3\overrightarrow{CD}$. $D \in AB, E \in AC, E_1 \in (BE, D_1 \in (CD$. Igazoljuk, hogy D_1, A és E_1 kollineáris pontok.

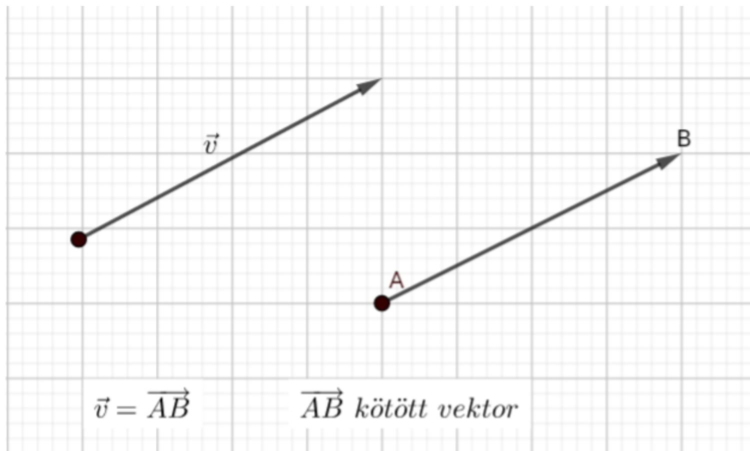
14. Az ABC háromszögben legyen $MN \parallel AB$, $M \in (AC)$, $N \in (BC)$. Jelölje D és E az $[MN]$, illetve az $[AB]$ felezöpontját. Igazold, hogy C, D és E pont kollineáris.

15. $ABCD$ paralelogramma oldalegyenesein felvesszük az M és N pontot, amelyekre: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AN} = 3 \cdot \overrightarrow{AD}$. Bizonyítsd be, hogy az M, C és N pontok kollineárisak.

Ha kérdésetek van, email-ben szívesen válaszolok.
emoke.s123@yahoo.com

Vektoralgebra

1. Értemezés. *Az irányított szakaszokat vektornak nevezzük, ami egy olyan fizikai mennyiség, amelyet iránya, irányítása és nagysága jellemez.*

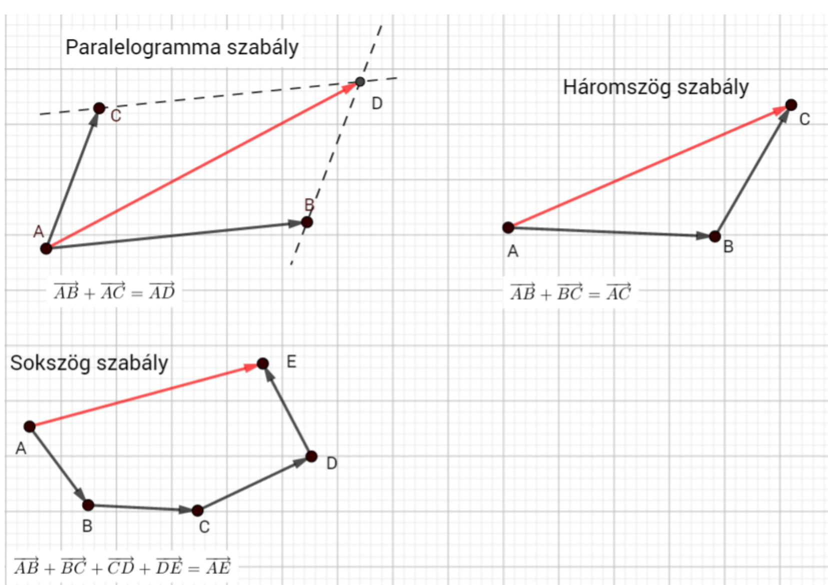


- **irány**: a vektor tartóegyenese adja
- **irányítás**: a kezdőponttól a végpont fele mutat
- **nagyság**: a kezdőpont és végpont közötti távolság. Jele: $\|\overrightarrow{AB}\|$

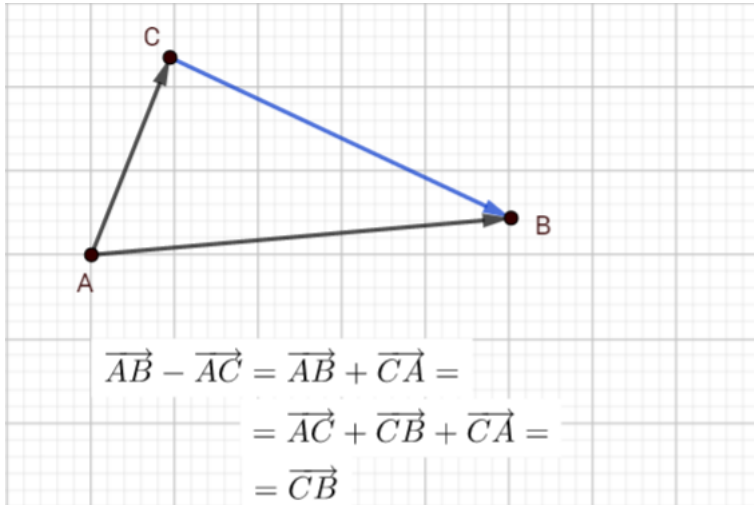
2. Értemezés. *Két vektor egyenlő, ha irányításuk és nagyságuk megegyezik, tartóegyeneseik pedig egybeesnek vagy párhuzamosak.*

1. Megjegyzés. ***Szabadvektor****:„csúsztatható”;* ***Nullvektor****:* $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$; ***Ellentett vektor****:* $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

<u>Vektorok összeadása</u>:

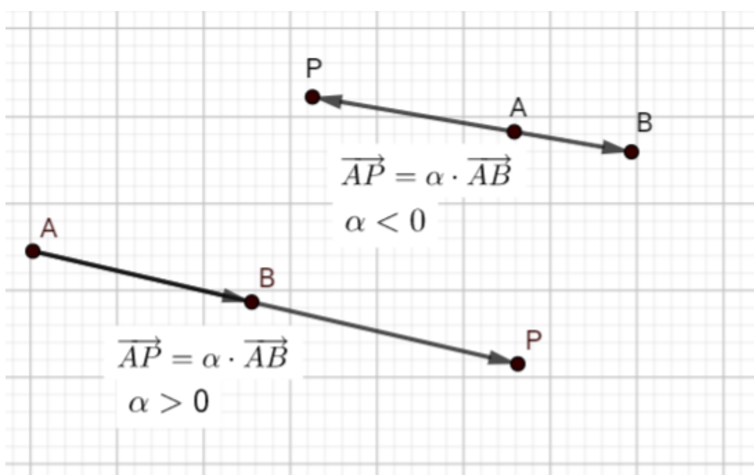


Vektorok kivonása:



Vektorok kivonása esetén „a nyíl mindig a kissebítendő fele mutat”.
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

Vektorok skalárral való szorzása:



- $\|\alpha \cdot \overrightarrow{AB}\| = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ iránya megegyezik az $\overrightarrow{AB}$ irányával.
- $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ irányítása megegyezik $\overrightarrow{AB}$ irányításával, ha $\alpha > 0$, különben ellentétes irányítású.
- ha $\alpha = 0$ akkor $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2. Megjegyzés. *Az A, B és C a sík három különböző pontja.*
A, B, C kollineáris pontok $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* : \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

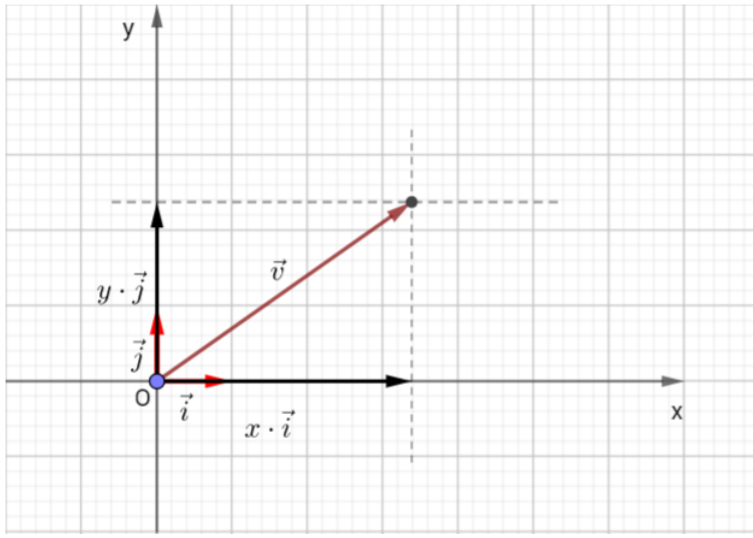
(FELADAT: 1. 2.)

Vektorok analítikus jellemzése:

Legyenek $\vec{i}, \vec{j}$ az Origó középponttú koordináta rendszer egységvektorai.

Kezdőpontjuk az O; $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
($(\vec{i}, \vec{j})$ ortonormált bázis)

$\forall\ \vec{v} \in \mathcal{V}_2$-re $\exists$ x, y $\in \mathbb{R}$: $\vec{v} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, ahol x és y a $\vec{v}$ koordinátái.



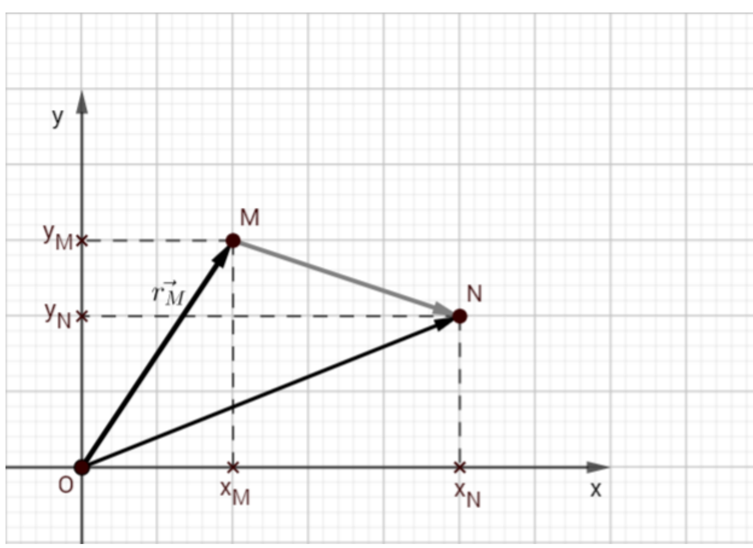
Műveletek:

Legyenek $\vec{v} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \vec{v}(x, y)$ és $\vec{u} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \vec{u}(x', y')$

$\vec{v} + \vec{u} = (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) + (x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}) = (x + x') \cdot \vec{i} + (y + y') \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{v} + \vec{u}(x + x', y + y')$
$\vec{v} - \vec{u} = (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) - (x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}) = (x - x') \cdot \vec{i} + (y - y') \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{v} - \vec{u}(x - x', y - y')$
$\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{i} + \alpha \cdot \vec{j} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{v}(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$

(FELADAT: 3. 4.)

Pont helyzetvektora:



Az M pont helyzetvektorán az $\overrightarrow{OM}$ vektort értjük és $\overrightarrow{r_M}$-el jelöljük.
$\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j} = \overrightarrow{r_M}(x_M, y_M)$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_N \cdot \vec{i} + y_N \cdot \vec{j}) - (x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j}) = (x_N - x_M) \cdot \vec{i} + (y_N - y_M) \cdot \vec{j} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}(x_N - x_M, y_N - y_M)$$
(FELADAT: 5.)

Szakaszt adott arányban osztó pont helyzetvektora:
(FELADAT: 6.)