Soluţii - Varianta III

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Varianta 1: Condiţiile de existenţă ale radicalilor $x+7 \geq 0$ şi $x-1 \geq 0$, adică $x \in [1, \infty)$. Prin ridicare la pătrat, ecuaţia devine $x+7+x-1+2\sqrt{(x+7)(x-1)} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+6x-7} = 5-x$. Egalitatea poate avea loc numai dacă $-x+5 \geq 0$. Prin urmare, $x \in [1,5]$. Prin ridicare la pătrat, obţinem $x^2+6x-7 = x^2-10x+25 \Leftrightarrow 16x = 32 \Leftrightarrow x = 2$.

Varianta 2: Condiţiile de existenţă ale radicalilor $x+7 \geq 0$ şi $x-1 \geq 0$, adică $x \in [1, \infty)$. Funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare (fiind suma a două funcţii strict crescătoare), deci ecuaţia poate avea cel mult o soluţie. Pe de altă parte $x = 2$ este soluţie, deci $x = 2$ este singura soluţie.

Observaţie: Indiferent de metoda de rezolvare aleasă, în lipsa condiţiilor care permit păstrarea şirului de echivalenţe, cele 4 puncte acordate pentru stabilirea acestora se vor acorda dacă a fost făcută verificarea soluţiilor obţinute.

2. a) Folosind regula de înmulţire a numerelor complexe scrise în formă trigonometrică avem

$$f(x+y) = \cos(2(x+y)\pi) + i\sin(2(x+y)\pi) = (\cos(2x\pi) + i\sin(2x\pi)) \cdot (\cos(2y\pi) + i\sin(2y\pi)) =$$

$$= f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

deci f este un morfism de grupuri între $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

b) f nu este injectivă deoarece $f(x+k) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$. f nu este surjectivă deoarece nici un număr complex nenul de modul diferit de 1 nu aparţine mulţimii $f(\mathbb{R})$.

c) $[f(x)]^4 = 1 \Leftrightarrow f(x) \in \{\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{k}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Presupunând că ar exista un izomorfism $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, ar exista $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(a) = -1$, prin urmare $g(0) = 1 = (-1)^2 = [g(a)]^2 = g(2a)$, ceea ce implică $2a = 0$, adică $a = 0$. Dar atunci $1 = g(0) = g(a) = -1$, contradicţie.

SUBIECTUL II (30 puncte)

Soluţia problemei 1. (a) Avem

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

(b) O variantă de soluţie este să demonstrăm că vectorii $\overrightarrow{PC'}$ şi $\overrightarrow{PQ}$ sunt coliniari. Avem

$$\overrightarrow{PC'} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ},$$

deci cei doi vectori sunt coliniari.

A doua variantă a soluţiei foloseşte reciproca teoremei lui Menelaus. Este uşor de constatat că

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = -1,$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{1}{3},$$

iar

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = -3.$$

Aşadar,

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = 1,$$

iar din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă coliniaritatea celor trei puncte. □

Soluţia problemei 2. Ecuaţia se mai poate scrie

$$(2m-1)(2\cos^2 x - 1) - 9\cos x + m - 5 = 0$$

sau

$$2(2m-1)\cos^2 x - 9\cos x - (m+4) = 0.$$

Presupunem, mai întâi, că $m \neq 1/2$.
Punem $\cos x = t$. Ecuaţia devine

$$2(2m-1)t^2 - 9t - (m+4) = 0.$$

Discriminantul ecuaţiei este

$$\begin{aligned}\Delta &= 81 + 8(2m-1)(m+4) = 81 + 8(2m^2 + 8m - m - 4) = 16m^2 + 56m + 49 = \\ &= (4m+7)^2.\end{aligned}$$

Rădăcinile ecuaţiei sunt

$$t_1 = \frac{9 - 4m - 7}{4(2m-1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$t_2 = \frac{9 + 4m + 7}{4(2m-1)} = \frac{m+4}{2m-1}.$$

Prima soluţie ne conduce la

$$\cos x = -\frac{1}{2},$$

de unde

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

A doua soluţie ne conduce la

$$\cos x = \frac{m+4}{2m-1}.$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$x = \pm \arccos\frac{m+4}{2m-1} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Soluţia există dacă şi numai dacă argumentul arccosinusului este între -1 şi 1, adică dacă este verificată dubla inegalitate

$$-1 \leq \frac{m+4}{2m-1} \leq 1,$$

adică sistemul de inegalităţi

$$\begin{cases} \dfrac{3(m+1)}{2m-1} \geq 0 \\ \dfrac{m-5}{2m-1} \geq 0 \end{cases},$$

ceea ce ne conduce la $m \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$. Dacă m nu este în această mulţime, ecuaţia are doar prima soluţie.
Dacă $m = 1/2$, ecuaţia se transformă în

$$-9\cos x - \frac{9}{2} = 0,$$

ceea ce ne conduce, din nou, la

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

În concluzie pentru orice $m \in \mathbb{R}$ obţinem soluţia $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, iar pentru $m \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$ avem şi soluţia $x = \pm\arccos\frac{m+4}{2m-1} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $\square$

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcţia este pară şi este suficient să studiem proprietăţile funcţiei pe intervalul $[0, \infty)$ şi în punctul 0. Pentru $x > 0$ şi $x \neq 1$ avem

$$f'(x) = \sqrt[3]{1-x^2} + \frac{1}{3}x(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}(-2x) = \sqrt[3]{1-x^2} - \frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1$. f fiind funcţie pară avem $f'(-x) = -f'(x) = -\frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ pentru $x > 0, x \neq 1$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = -1$. În punctul 0 f nu este derivabilă deoarece este continuă într-o vecinătate, există f' pe această vecinătate, cu excepţia punctului $x_0 = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)$ (se aplică consecinţa teoremei lui Lagrange). Astfel domeniul maxim de derivabilitate este $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}, & x < 0, x \neq -1 \\ \frac{3-5x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}, & x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

2. Determinăm intervalele de monotonie pentru $x \in (0, \infty)$:

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 5x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\sqrt{\frac{3}{5}}, 1\right) \cup (1, \infty).$$

Folosind paritatea funcţiei obţinem că funcţia este crescătoare pe $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, descrescătoare pe $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$ şi crescătoare pe $\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, descrescătoare pe $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty\right)$, adică are două puncte de maxim în $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ şi $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Pe de altă parte

$$f(x_{1,2}) = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{6}}},$$

deci

$$f(x) \leq \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{6}}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Calculăm derivata a doua pentru $x > 0, x \neq 1$:

$$f''(x) = \frac{-10x\sqrt[3]{(1-x^2)^2} - (3-5x^2)\frac{2}{3}(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}(-2x)}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}} =$$

$$= \frac{2x(5x^2-9)}{9(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}.$$

Pentru $x < 0, x \neq -1$ obţinem

$$f''(x) = f''(-x) = -\frac{2x(5x^2-9)}{9(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}},$$

deci în mulţimea D obţinem punctele de inflexiune $i_1 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ şi $i_2 = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Pe de altă parte $f''(x) < 0$, pentru $x \in (0, 1)$ şi $f''(x) > 0$, pentru $x \in \left(1, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, deci $i_3 = 1$ este punct de inflexiune. În mod analog şi $i_4 = -1$ este punct de inflexiune, deci funcţia f admite 4 puncte de inflexiune $\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{5}, -1, 1, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$.

4. Folosind paritatea funcţiei avem

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x\sqrt[3]{1-x^2}dx = \int_{0}^{1}(1-t)^{\frac{1}{3}}dt = -\frac{3}{4}(1-t)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

5. Folosim inegalitatea demonstrată la punctul 2). Notăm $M = \frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{6}}}$. Din inegalitatea

$$0 \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [-1,1]$$

deducem

$$0 \leq x^{2n}f(x) \leq M\cdot x^{2n},\ \forall x \in [-1,1]$$

deci

$$0 \leq \int_{-1}^{1} x^{2n}f(x)dx \leq \frac{2M}{2n+1},\ \forall n \geq 1.$$

Folosind criteriul majorării rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x^{2n}f(x)dx = 0.$$