**Matematică, Concursul Mate-Info UBB din 25 aprilie 2015**

**Barem detaliat şi comentarii ale soluţiilor**

**Subiectul I (Algebră)**

**1a.** $m = 1/2 \Rightarrow x^4 = 3$ ........................................................ 2p

$x_1 = \sqrt[4]{3}$, $x_2 = -\sqrt[4]{3}$, $x_3 = \sqrt[4]{3}i$, $x_4 = -\sqrt[4]{3}i$ ........................ $4 \times 2\text{p} = 8\text{p}$

**1b.** Cea mai simplă cale de rezolvare presupunea substituţia $x^2 = y$, ceea ce conducea la ecuaţia de gradul 2 de forma $y^2 - (2m-1)y + 4m - 5 = 0$ ........................ 1p

continuată cu observaţia că ecuaţia în $x$ are toate rădăcinile reale $\Leftrightarrow \Delta_y \geq 0,\ S_y \geq 0,\ P_y \geq 0$ ........................................................ 3p

$$\begin{cases} 4m^2 - 20m + 21 \geq 0 \\ 2m - 1 \geq 0 \\ 4m - 5 \geq 0 \end{cases}$$ ........................................ 0,5p

$$\begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right) \\ m \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \\ m \in \left[\frac{5}{4}, \infty\right) \end{cases}$$ ........................................ 1p

Soluţia $m \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$ ........................................ 1p

Dacă în loc de abordarea cu suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei în y, se continua cu impunerea condiţiilor ca

$$y_1 = \frac{2m - 1 - \sqrt{m^2 - 20m + 21}}{2} \geq 0 \text{ şi } y_2 = \frac{2m - 1 + \sqrt{m^2 - 20m + 21}}{2} \geq 0$$

(metodă utilizată de mulţi candidaţi), atunci rezolvarea inecuaţiilor (de fapt, era suficient a celei dintâi) implica atenţie la ridicarea la puterea a doua, având în vedere faptul că $2m - 1$ putea fi pozitiv sau negativ.

**2.** Calculul $\det X = ad - bc$ ........................................................ 2p

Impunerea condiţiei $ad - bc = 0$ ........................................ 1p

Calculul lui $X^2$ ........................................................ 2p

deducerea faptului că $X^2 = (a+d)X$ ........................................ 2p

Aplicarea metodei inducţiei matematice era obligatorie, de unde rezulta şi concluzia ........................................................ $2\text{p} + 1\text{p} = 3\text{p}$

**Nota.** Sugestiile date mai sus nu reprezintă singurele metode de abordare. Au fost acceptate toate soluţiile corecte, indiferent de metoda de lucru.

**Matematică, Concursul Mate-Info UBB din 25 aprilie 2015**

**Barem detaliat şi comentarii ale soluţiilor**

**Subiectul II (Geometrie)**

**1a.** Scrierea determinantului $\Delta$

Calculul determinantului $\Delta = -m^2 + 5m - 8$ .................................4p

Exprimarea faptului că necoliniaritatea celor trei puncte este echivalentă cu condiţia $\Delta \neq 0, \ (\forall) \ m \in \mathbb{R}$ ..........................................................2p

Demonstraţia faptului că $-m^2 + 5m - 8 \neq 0, \ (\forall) \ m \in \mathbb{R}$ ..........................4p

**1b.** Formula ariei ..........................................................1p

$\text{aria}(ABC) = \dfrac{1}{2}| - m^2 + 5m - 8| = \dfrac{1}{2}(m^2 - 5m + 8)$ ..........................2p

$\text{aria}(ABC) \to \min \Leftrightarrow m^2 - 5m + 8 \to \min \Leftrightarrow m = m_V \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$ .............7p

**2.** Reducerea la o formă mai simplă ..........................................8p

O variantă posibilă era abordarea:

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$\sin^4 x + \cos^4 x \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x \geq 0$

Soluţia: $x \in \mathbb{R}$ ..........................................................2p

**Nota.** Sugestiile date mai sus nu reprezintă singurele metode de abordare. Au fost acceptate toate soluţiile corecte, indiferent de metoda de lucru.

**Matematică, Concursul Mate-Info UBB din 25 aprilie 2015**

**Barem detaliat şi comentarii ale soluţiilor**

**Subiectul III (Analiză matematică)**

**1a.** Paritatea/imparitatea unei funcţii presupun simetria domeniului de definiţie, i.e., $\forall x \in \mathbb{R}$, avem $-x \in \mathbb{R}$; Calculul $f(-x) = (-x)\,\mathrm{arctg}\,(-x)$ .......................... 1p

şi argumentarea că funcţia arctg este impară .............................. 2p

Deducerea faptului că $f(-x) = x\,\mathrm{arctg}\,x = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, precum şi concluzia că funcţia $f$ e pară .................................................................. 2p

Calculul lui $f'(x) = 1 \cdot \mathrm{arctg}\,x + x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ....................... 3p

Deducerea faptului că $f'(-x) = -f'(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, şi concluzia că $f'$ este impară 2p

La acest punct, o altă soluţie elegantă se obţinea din abordarea: $f$ pară $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f'(-x)\cdot(-1) = f'(x) \Rightarrow f'$ impară.

**1b.** Folosirea metodei de integrare prin părţi pentru $\int f(x)dx = \int x\,\mathrm{arctg}\,x dx = \int \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' \mathrm{arctg}\,x dx = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \int \dfrac{x^2}{2}(\mathrm{arctg}\,x)'dx =$

$= \dfrac{x^2 \mathrm{arctg}\,x}{2} - \int \dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx =$ .............................................. 5p

$= \dfrac{1}{2}\left(x^2\,\mathrm{arctg}\,x - \int \dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}dx\right) = \dfrac{1}{2}\left(x^2\,\mathrm{arctg}\,x - x + \int \dfrac{dx}{1+x^2}\right) =$ ........ 4p

$= \dfrac{1}{2}(x^2\,\mathrm{arctg}\,x - x + \mathrm{arctg}\,x) + \mathcal{C}$ .............................................. 1p

$$\left.\begin{array}{l} F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ este primitivă a lui } f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ a.î.} \\ F(x) = \dfrac{1}{2}(x^2\,\mathrm{arctg}\,x - x + \mathrm{arctg}\,x) + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ F \text{ impară şi } 0 \in \mathbb{R} \text{ (domeniul lui } F) \Rightarrow F(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 0 \text{ ................ 3p}$$

Singura primitivă care ar putea fi impară este $F_0(x) = \dfrac{1}{2}(x^2\,\mathrm{arctg}\,x - x + \mathrm{arctg}\,x)$, $x \in \mathbb{R}$. Avem $F_0(-x) = \ldots = -F_0(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci $F_0$ este impară ........ 2p

**2.** $\int_{-x}^{x} g(t)dt = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-x}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\int_{0}^{-x} g(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$

Fie $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ o primitivă a lui $g$ (continuitatea lui $g$ asigură existenţa) Derivând în $(*) \Rightarrow -G'(-x)\cdot(-1) + G'(x) = 0$, adică $g(-x) + g(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ .... 4p

**Nota.** Sugestiile date mai sus nu reprezintă singurele metode de abordare. Au fost acceptate toate soluţiile corecte, indiferent de metoda de lucru.