

Kronecker-modulusok kombinatorikája és alkalmazások

Szöllősi István

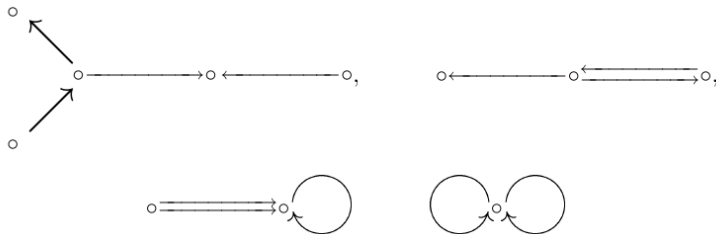
BBTE, Magyar Matematika és Informatika Intézet

Tegezek

Meghatározás

Egy Q tegez egy irányított multigráf (két csomópont között több irányított él is lehet, illetve hurkok létezése is megengedett).

Példa



Utak a tegezben

Meghatározás

Legyen Q egy tegez és a, b csomópontok. Egy $\ell \geq 1$ hosszúságú út a -ból b -be egy olyan $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \mid b)$ élsorozat, ahol minden α_i élre igaz, hogy az α_i nyíl eleje egybeesik az α_{i+1} nyíl végével. Minden a csomóponthoz hozzárendelünk egy $\ell = 0$ hosszúságú utat, a triviális vagy stacionárius utat.

Tegez útalgebrája

Meghatározás

A Q tegez kQ útalgebrája egy olyan k -algebra, ahol a k -vektortérnek a bázisát az $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \mid b)$, $\ell \geq 0$ utak alkotják és ahol két bázisvektor szorzata a megfelelő utak összetevését jelenti. Vagyis az $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \mid b)$ és $(c \mid \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid d)$ utak szorzata

$$(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \mid b)(c \mid \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid d) = \\ = \delta_{bc}(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid d)$$

(ahol δ_{bc} a Kronecker-delta).

Tegez reprezentációja

Meghatározás

Legyen Q egy véges tegez. A Q k -lineáris reprezentációja (vagy csak egyszerűen reprezentációja) a következőt jelenti:

- (1) Q minden egyes a csomópontjához egy M_a k -vektortért rendelünk.*
- (2) Minden egyes $\alpha : a \longrightarrow b$ élhez egy megfelelő $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$ k -lineáris függvényt rendelünk.*

A Kronecker-tegez és a Kronecker-algebra

Meghatározás

A *Kronecker-tegez*: $\circ \begin{smallmatrix} \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{smallmatrix} \circ$.

Meghatározás

A *Kronecker-algebra* izomorf a *Kronecker-tegez* *útalgebrájával*.

A Kronecker-algebrának $\begin{bmatrix} k & 0 \\ k^2 & k \end{bmatrix}$ alakú elemei vannak, vagyis

2×2 -es $\begin{pmatrix} v & 0 \\ (u_1, u_2) & w \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $v, w \in k$,
 $(u_1, u_2) \in k^2$. A szorzás a következő módon történik:

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ (u_1, u_2) & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ (v_1, v_2) & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df & 0 \\ (u_1 f + v_1 c, u_2 f + v_2 c) & ce \end{pmatrix}.$$

A Kronecker-tegez és a Kronecker-algebra

Meghatározás

A Kronecker-tegez: $\circ \begin{smallmatrix} \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{smallmatrix} \circ$.

Meghatározás

A Kronecker-algebra izomorf a Kronecker-tegez útalgebrájával.

A Kronecker-algebrának $\begin{bmatrix} k & 0 \\ k^2 & k \end{bmatrix}$ alakú elemei vannak, vagyis

2×2 -es $\begin{pmatrix} v & 0 \\ (u_1, u_2) & w \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $v, w \in k$,
 $(u_1, u_2) \in k^2$. A szorzás a következő módon történik:

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ (u_1, u_2) & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ (v_1, v_2) & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df & 0 \\ (u_1 f + v_1 c, u_2 f + v_2 c) & ce \end{pmatrix}.$$

A Kronecker-tegez és a Kronecker-algebra

Meghatározás

A Kronecker-tegez: $\circ \begin{smallmatrix} \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{smallmatrix} \circ$.

Meghatározás

A Kronecker-algebra izomorf a Kronecker-tegez útalgebrájával.

A Kronecker-algebrának $\begin{bmatrix} k & 0 \\ k^2 & k \end{bmatrix}$ alakú elemei vannak, vagyis

2×2 -es $\begin{pmatrix} v & 0 \\ (u_1, u_2) & w \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $v, w \in k$,
 $(u_1, u_2) \in k^2$. A szorzás a következő módon történik:

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ (u_1, u_2) & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ (v_1, v_2) & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df & 0 \\ (u_1 f + v_1 c, u_2 f + v_2 c) & ce \end{pmatrix}.$$

A Kronecker-modulus

Meghatározás

A Kronecker-modulus egy véges dimenziós jobboldali modulus a Kronecker-algebra fölött.

Minden M Kronecker-modulust azonosíthatunk a Kronecker-tegeznek egy $(X_1 \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\rightleftarrows}} X_2)$ reprezentációjával. Itt X_1 és X_2 véges dimenziós k -vektorterek és φ_1, φ_2 k -lineáris függvények, amiknek felírhatjuk a mátrixszát a kanonikus bázisban. A reprezentációból a Kronecker-modulust a következő módon kapjuk vissza: a vektortér $M = X_1 \oplus X_2$, a jobboldali csoportthatás pedig $\cdot : M \times A \rightarrow M$, ahol

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (u_1, u_2) & \mu \end{pmatrix} = (x_1 \lambda + \varphi_1(x_2) u_1 + \varphi_1(x_2) u_2, x_2 \mu).$$

A Kronecker-modulus

Meghatározás

A Kronecker-modulus egy véges dimenziós jobboldali modulus a Kronecker-algebra fölött.

Minden M Kronecker-modulust azonosíthatunk a Kronecker-tegeznek egy $(X_1 \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\rightleftarrows}} X_2)$ reprezentációjával. Itt X_1 és X_2 véges dimenziós k -vektorterek és φ_1, φ_2 k -lineáris függvények, amiknek felírhatjuk a mátrixszát a kanonikus bázisban. A reprezentációból a Kronecker-modulust a következő módon kapjuk vissza: a vektortér $M = X_1 \oplus X_2$, a jobboldali csoportthatás pedig $\cdot : M \times A \rightarrow M$, ahol

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (u_1, u_2) & \mu \end{pmatrix} = (x_1 \lambda + \varphi_1(x_2) u_1 + \varphi_1(x_2) u_2, x_2 \mu).$$

Felbonthatatlan Kronecker-modulusok

A felbonthatatlan Kronecker-modulusok három családba sorolhatók:

- 1 a preprojektívek,
- 2 a regulárisok,
- 3 a preinjektívek.

A Kronecker-modulusok kategóriájának jelölése: $\text{mod-}kK$.

Felbonthatatlan Kronecker-modulusok

A felbonthatatlan Kronecker-modulusok három családba sorolhatók:

- 1 a preprojektívek,
- 2 a regulárisok,
- 3 a preinjektívek.

A Kronecker-modulusok kategóriájának jelölése: $\text{mod-}kK$.

Felbonthatatlan Kronecker-modulusok

A felbonthatatlan Kronecker-modulusok három családba sorolhatók:

- 1 a preprojektívek,
- 2 a regulárisok,
- 3 a preinjektívek.

A Kronecker-modulusok kategóriájának jelölése: $\text{mod-}kK$.

Felbonthatatlan Kronecker-modulusok

A felbonthatatlan Kronecker-modulusok három családba sorolhatók:

- 1 a preprojektívek,
- 2 a regulárisok,
- 3 a preinjektívek.

A Kronecker-modulusok kategóriájának jelölése: $\text{mod-}kK$.

Felbonthatatlan Kronecker-modulusok

A felbonthatatlan Kronecker-modulusok három családba sorolhatók:

- 1 a preprojektívek,
- 2 a regulárisok,
- 3 a preinjektívek.

A Kronecker-modulusok kategóriájának jelölése: $\text{mod-}kK$.

Felbonthatatlan Kronecker-modulusok

Preinjektív $I_n : k^n \begin{matrix} \xleftarrow{(E_n \ 0)} \\ \xleftarrow{(0 \ E_n)} \end{matrix} k^{n+1}$

Preprojektív $P_n : k^{n+1} \begin{matrix} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}} \end{matrix} k^n$

←
←
dualitás

E_n – egységmátrix

$n \in \mathbb{N}$

$J_0^{(n)}$ – n -ed rendű Jordan-blokk
(0 sajátértékkel)

Reguláris $R_p(n) : k^n \begin{matrix} \xleftarrow{pE_n + J_0^{(n)}} \\ \xleftarrow{E_n} \end{matrix} k^n$ és $R_\infty(n) : k^n \begin{matrix} \xleftarrow{E_n} \\ \xleftarrow{J_0^{(n)}} \end{matrix} k^n \quad p \in k$
(ha a test algebrailag zárt)

Kronecker-modulusok felbontása

Tétel (Krull-Schmidt)

Minden $M \in \text{mod-}kK$ Kronecker-modulus a következő módon bontható fel egyedi módon (izomorfizmus erejéig):

$$M = (P_{c_1} \oplus \cdots \oplus P_{c_n}) \oplus (\oplus_{p \in \mathbb{P}_k^1} R_p(\mu^{(p)})) \oplus (I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_m}),$$

ahol:

- ❶ $(c_1, \dots, c_n)$ véges, nemnegatív egész számokból álló növekvő sorozat,
- ❷ $\mu^{(p)} = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ partíció, ahol $p \in \mathbb{P}_k^1$ (vagy $p \in k \cup \{\infty\}$) és $R_p(\mu^{(p)}) = R_p(\mu_1) \oplus \cdots \oplus R_p(\mu_t)$,
- ❸ $(d_1, \dots, d_m)$ véges, nemnegatív egész számokból álló csökkenő sorozat.

Meghatározás

Az előbbi (1), (2), (3) pontoknál felsorolt egész számokat nevezzük az M modulus **Kronecker-invariánsainak**. Ezek az invariánsok (izomorfizmus erejéig) meghatározzák az M Kronecker-modulust.

Kronecker-modulusok felbontása

Tétel (Krull-Schmidt)

Minden in $M \in \text{mod-}kK$ Kronecker-modulus a következő módon bontható fel egyedi módon (izomorfizmus erejéig):

$$M = (P_{c_1} \oplus \cdots \oplus P_{c_n}) \oplus (\oplus_{p \in \mathbb{P}_k^1} R_p(\mu^{(p)})) \oplus (I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_m}),$$

ahol:

- ❶ $(c_1, \dots, c_n)$ véges, nemnegatív egész számokból álló növekvő sorozat,
- ❷ $\mu^{(p)} = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ partíció, ahol $p \in \mathbb{P}_k^1$ (vagy $p \in k \cup \{\infty\}$) és $R_p(\mu^{(p)}) = R_p(\mu_1) \oplus \cdots \oplus R_p(\mu_t)$,
- ❸ $(d_1, \dots, d_m)$ véges, nemnegatív egész számokból álló csökkenő sorozat.

Meghatározás

Az előbbi (1), (2), (3) pontoknál felsorolt egész számokat nevezzük az M modulus **Kronecker-invariánsainak**. Ezek az invariánsok (izomorfizmus erejéig) meghatározzák az M Kronecker-modulust.

Hom(X, Y)

$$\text{Hom}(R, P) = \text{Hom}(I, P) = \text{Hom}(I, R) = 0.$$

	P	R	I
P	✓	✓	✓
R	✗	✓	✓
I	✗	✗	✓

$$P \hookrightarrow P' \iff | \leftarrow |'$$

Tétel (Szántó Cs.)

Legyen $P := P_{d_1} \oplus \dots \oplus P_{d_n}$ és $P' := P_{c_1} \oplus \dots \oplus P_{c_m}$, ahol $0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_m$ és $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n$. Akkor $P \hookrightarrow P' \iff \sum_{c_{i-1} < d_j} (d_j + 1) \leq (c_i + 1) + \dots + (c_m + 1)$ minden $i \in \{1, \dots, m\}$ -re. ($c_0 = -1$ és az üres összeg értéke 0).

$$P \hookrightarrow P' \iff I \ll I'$$

A következő multiplikatív jelölést használva:

$$P' = (a_0 P_0) \oplus \dots \oplus (a_n P_n) \oplus \dots$$

$$P = (b_0 P_0) \oplus \dots \oplus (b_n P_n) \oplus \dots$$

azt kapjuk, hogy $P' \hookrightarrow P$ akkor és csak akkor, ha

$$a_0 + 2a_1 + \dots + (n+1)a_n \leq b_0 + 2b_1 + \dots + (n+1)b_n$$

$$2a_1 + \dots + (n+1)a_n \leq 2b_1 + \dots + (n+1)b_n$$

...

$$(n+1)a_n \leq (n+1)b_n.$$

$$I \hookrightarrow I'$$

Tétel (Szántó Cs., Szöllősi I.)

Legyenek $d_1 \geq \dots \geq d_n > 0$ és $c_1 \geq \dots \geq c_m > 0$ csökkenő sorozatok.

$$I_{d_1} \oplus \dots \oplus I_{d_n} \oplus dI_0 \hookrightarrow I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_m} \oplus cI_0 \iff d \leq c \text{ és}$$

$d_i + \dots + d_n \leq \sum_{c_j \leq d_i} c_j$ minden $i = \{1, \dots, n\}$ -re (az üres összeg értéke 0).

$$I \hookrightarrow I'$$

A következő multiplikatív jelölést használva:

$$I' = (a_0 I_0) \oplus \dots \oplus (a_n I_n) \oplus \dots,$$

$$I = (b_0 I_0) \oplus \dots \oplus (b_n I_n) \oplus \dots$$

azt kapjuk, hogy $I' \hookrightarrow I$ akkor és csak akkor, ha

$$a_0 \leq b_0$$

$$a_1 \leq b_1$$

$$a_1 + 2a_2 \leq b_1 + 2b_2$$

...

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \leq b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n.$$

Rövid egzakt sorok

$[M]$ - az $M \in \text{mod-}kK$ izomorfizmusosztálya.

Tétel (Szántó Cs.)

Legyenek I_i és I_j felbonthatatlan preinjektív Kronecker-modulusok. Akkor és csak akkor létezik egy $0 \rightarrow I_j \rightarrow I \rightarrow I_i \rightarrow 0$ rövid egzakt sor, ha

$$[I] \in \begin{cases} \{[I_i \oplus I_j]\} & i - j \geq -1 \\ \{[I_j \oplus I_i], [I_{j-1} \oplus I_{i+1}], \dots, [I_{j-\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor} \oplus I_{i+\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor}]\} & i - j < -1 \end{cases}$$

Tétel (Szántó Cs.)

Legyenek P_i és P_j felbonthatatlan preprojektív Kronecker-modulusok. Akkor és csak akkor létezik egy $0 \rightarrow P_j \rightarrow P \rightarrow P_i \rightarrow 0$ rövid egzakt sor, ha

$$[P] \in \begin{cases} \{[P_i \oplus P_j]\} & i - j \leq -1 \\ \{[P_j \oplus P_i], [P_{j+1} \oplus P_{i-1}], \dots, [P_{j+\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor} \oplus P_{i-\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor}]\} & i - j > -1 \end{cases}$$

Rövid egzakt sorok

$[M]$ - az $M \in \text{mod-}kK$ izomorfizmusosztálya.

Tétel (Szántó Cs.)

Legyenek I_i és I_j felbonthatatlan preinjektív Kronecker-modulusok. Akkor és csak akkor létezik egy $0 \rightarrow I_j \rightarrow I \rightarrow I_i \rightarrow 0$ rövid egzakt sor, ha

$$[I] \in \begin{cases} \{[I_i \oplus I_j]\} & i - j \geq -1 \\ \{[I_j \oplus I_i], [I_{j-1} \oplus I_{i+1}], \dots, [I_{j-\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor} \oplus I_{i+\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor}]\} & i - j < -1 \end{cases}$$

Tétel (Szántó Cs.)

Legyenek P_i és P_j felbonthatatlan preprojektív Kronecker-modulusok. Akkor és csak akkor létezik egy $0 \rightarrow P_j \rightarrow P \rightarrow P_i \rightarrow 0$ rövid egzakt sor, ha

$$[P] \in \begin{cases} \{[P_i \oplus P_j]\} & i - j \leq -1 \\ \{[P_j \oplus P_i], [P_{j+1} \oplus P_{i-1}], \dots, [P_{j+\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor} \oplus P_{i-\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor}]\} & i - j > -1 \end{cases}$$

Rövid egzakt sorok

$[M]$ - az $M \in \text{mod-}kK$ izomorfizmusosztálya.

Tétel (Szántó Cs.)

Legyenek I_i és I_j felbonthatatlan preinjektív Kronecker-modulusok. Akkor és csak akkor létezik egy $0 \rightarrow I_j \rightarrow I \rightarrow I_i \rightarrow 0$ rövid egzakt sor, ha

$$[I] \in \begin{cases} \{[I_i \oplus I_j]\} & i - j \geq -1 \\ \{[I_j \oplus I_i], [I_{j-1} \oplus I_{i+1}], \dots, [I_{j-\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor} \oplus I_{i+\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor}]\} & i - j < -1 \end{cases}$$

Tétel (Szántó Cs.)

Legyenek P_i és P_j felbonthatatlan preprojektív Kronecker-modulusok. Akkor és csak akkor létezik egy $0 \rightarrow P_j \rightarrow P \rightarrow P_i \rightarrow 0$ rövid egzakt sor, ha

$$[P] \in \begin{cases} \{[P_i \oplus P_j]\} & i - j \leq -1 \\ \{[P_j \oplus P_i], [P_{j+1} \oplus P_{i-1}], \dots, [P_{j+\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor} \oplus P_{i-\lfloor \frac{i-j}{2} \rfloor}]\} & i - j > -1 \end{cases}$$

Rövid egzakt sorok

Tétel (Szántó Cs., Szöllősi I.)

Legyenek $a_1 \geq \dots a_p \geq 0$, $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ és $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ csökkenő sorozatok. Akkor és csak akkor létezik egy

$$0 \rightarrow I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n} \rightarrow I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r} \rightarrow I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p} \rightarrow 0$$

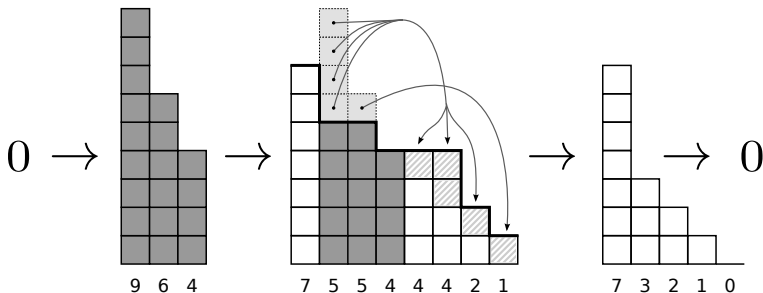
alakú rövid egzakt sor, ha $r = n + p$, $\exists \beta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n + p\}$, $\exists \alpha : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n + p\}$ szigorúan növekvő függvények úgy, hogy $\text{Im} \alpha \cap \text{Im} \beta = \emptyset$ és $\exists m_j^i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ úgy, hogy $\forall \ell \in \{1, \dots, n + p\}$ -re teljesül a következő összefüggés:

$$c_\ell = \begin{cases} b_i - \sum_{\substack{\beta(i) < \alpha(j) \\ 1 \leq j \leq p}} m_j^i, & \text{where } i = \beta^{-1}(\ell) \quad \ell \in \text{Im} \beta \\ a_j + \sum_{\substack{\beta(i) < \alpha(j) \\ 1 \leq i \leq n}} m_j^i, & \text{where } j = \alpha^{-1}(\ell) \quad \ell \in \text{Im} \alpha \end{cases}$$

Rövid egzakt sorok

Példa

$$0 \rightarrow I_9 \oplus I_6 \oplus I_4 \rightarrow I_7 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_2 \oplus I_1 \rightarrow I_7 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0 \rightarrow 0.$$



Rövid egzakt sorok

Tétel (Szöllősi I.)

Legyenek $a_1 \geq \dots \geq a_p \geq 0$, $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ csökkenő sorozatok és $B_j = \{l \in \{0, \dots, n\} \mid \sum_{k=1}^l b_k + \sum_{k=1}^j a_k \geq \sum_{k=1}^{l+j} c_k\}$ minden $1 \leq j \leq p$ -re. Akkor és csak akkor létezik egy

$$0 \rightarrow l_{b_1} \oplus \dots \oplus l_{b_n} \rightarrow l \rightarrow l_{a_1} \oplus \dots \oplus l_{a_p} \rightarrow 0$$

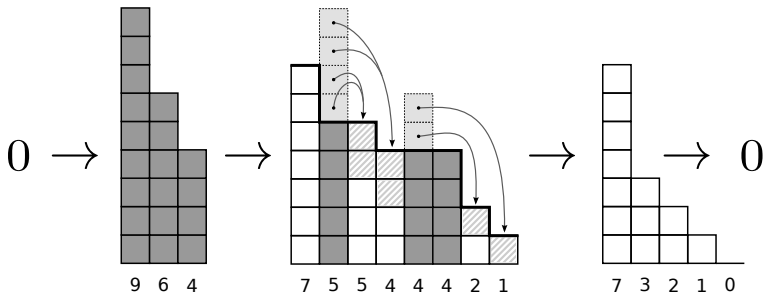
alakú rövid egzakt sor, ha $[l] = [l_{c_1} \oplus \dots \oplus l_{c_r}]$, $r = p + n$, $\sum_{i=1}^r c_i = \sum_{i=1}^p a_i + \sum_{i=1}^n b_i$, $B_j \neq \emptyset$, $a_j \leq c_{\alpha_j}$ és $b_i \geq c_{\beta_i}$ minden $1 \leq j \leq p$ és $1 \leq i \leq n$ értékre, ahol

$$\alpha_j = \begin{cases} \min B_1 + 1 & j = 1 \\ \max\{\alpha_{j-1} + 1, \min B_j + j\} & 1 < j \leq p \end{cases}$$

és

$$\beta_i = \begin{cases} \min\{l \in \{1, \dots, r\} \mid l \neq \alpha_j, 1 \leq j \leq p\} & i = 1 \\ \min\{l \in \{\beta_{i-1} + 1, \dots, r\} \mid l \neq \alpha_j, 1 \leq j \leq p\} & 1 < i \leq n \end{cases}$$

Rövid egzakt sorok

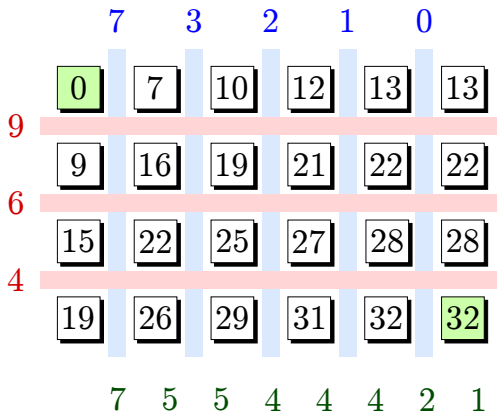


Megjegyzés: Lineáris idejű algoritmussal eldönthető, hogy egy adott középső tag megfelel-e a tételben szereplő követelményeknek.

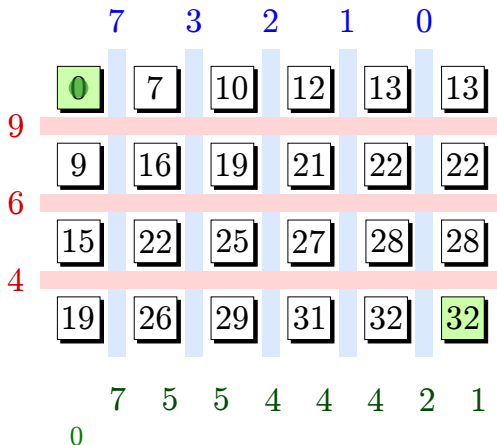
Rövid egzakt sorok

	7	3	2	1	0
	0	7	10	12	13
9	9	16	19	21	22
6	15	22	25	27	28
4	19	26	29	31	32

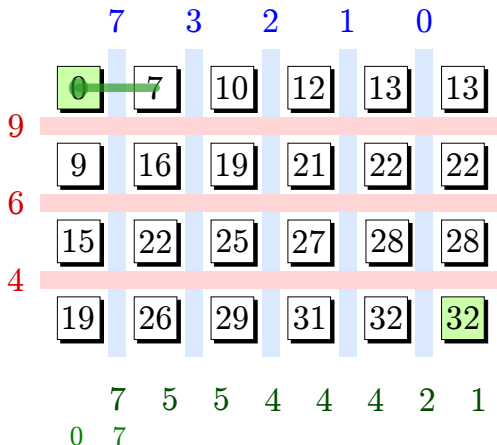
Rövid egzakt sorok



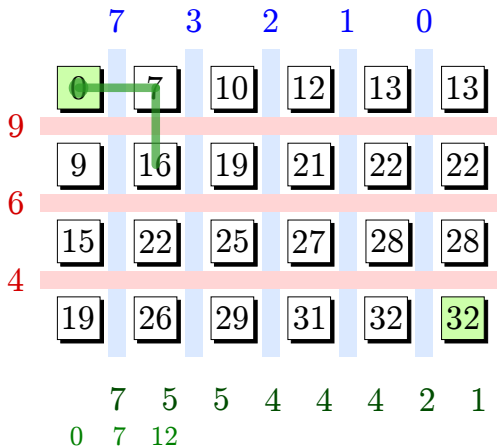
Rövid egzakt sorok



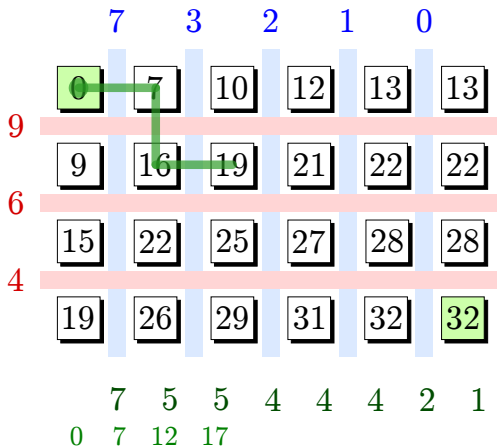
Rövid egzakt sorok



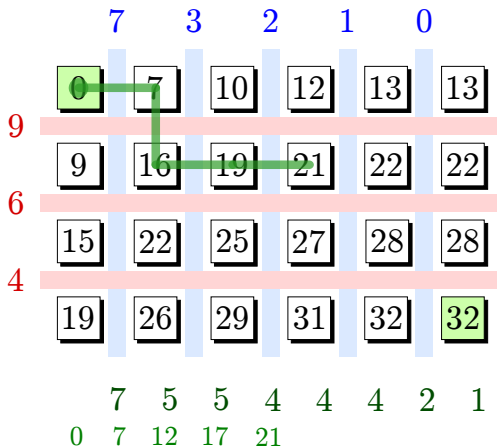
Rövid egzakt sorok



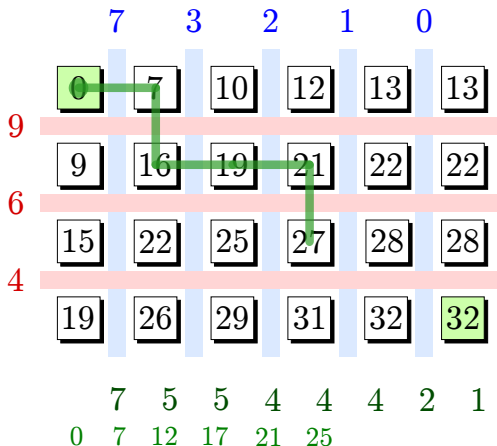
Rövid egzakt sorok



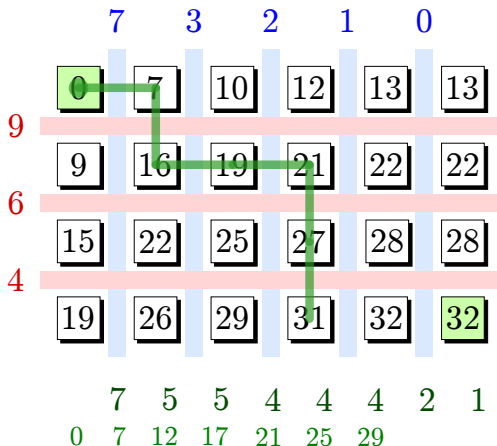
Rövid egzakt sorok



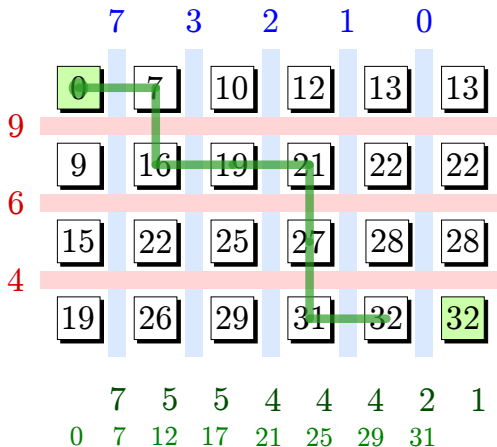
Rövid egzakt sorok



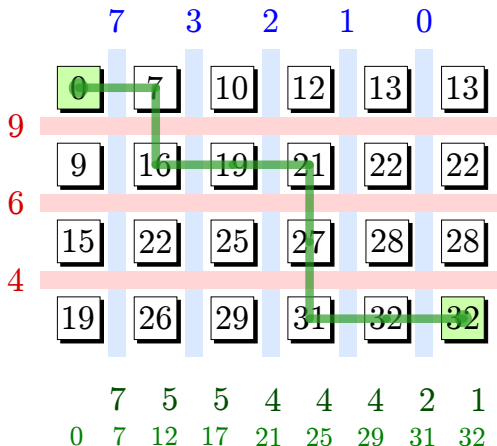
Rövid egzakt sorok



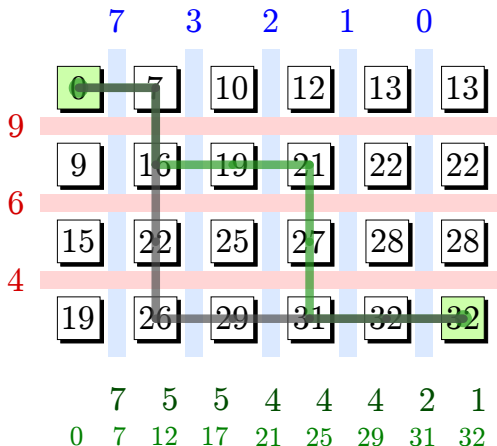
Rövid egzakt sorok



Rövid egzakt sorok



Rövid egzakt sorok



Az algoritmus

Algorithm 1: IsPreinjectiveExt(I' , I'' , I)

input : Preinjective Kronecker modules l', l'' and l , where $l' = l_{b_1} \oplus \cdots \oplus l_{b_n}$, $l'' = l_{a_1} \oplus \cdots \oplus l_{a_m}$
 $l = l_{c_1} \oplus \cdots \oplus l_{c_p}$ and $m, n, p > 0$.

$$\text{output: } \begin{cases} \text{True} & \text{if } l \text{ is a middle term in } \text{Ext}^1(I'', I') \\ \text{False} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

```
if  $m + n \neq p$  then return False
```

```

 $S_a, S_b, S_c \leftarrow 0;$ 
 $i, j \leftarrow 1;$ 

```

for $t \leftarrow 1$ to p do
$$S_c \leftarrow S_c + c_t;$$

```

if  $j \leq m$  and  $a_j \leq c_t$  and  $S_a + S_b + a_j \geq S_c$  then
     $S_a \leftarrow S_a + a_j$ ;
     $j \leftarrow j + 1$ ;

```

```

else if  $i \leq n$  and  $b_i \geq c_t$  and  $S_a + S_b + b_i \geq S_c$  then
    |  $S_b \leftarrow S_b + b_i$ ;
    |  $i \leftarrow i + 1$ ;

```

```
else return False;
```

```

if  $S_a + S_b \neq S_c$  then return False;

```

```
else return True;
```

Az összes középső tag generálása

- Az összes középső tag (bővítés) generálására backtracking algoritmust használhatunk.
- A megoldástér az s szám r hosszúságú partícióinak halmaza, vagyis a megoldást $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ alakú sorozatok közt keressük, ahol $r = p + n$ és $\sum_{k=1}^r c_k = s = \sum_{j=1}^p a_j + \sum_{i=1}^n b_i$.
- Az előbbi tétel (explicit verzióját) használva kiszűrhetők a nem megfelelő sorozatok.
- **Legrosszabb eset:** generáljuk ki az összes középső tagot a $0 \rightarrow ml_0 \rightarrow l \rightarrow l_n \rightarrow 0$ rövid egzakt sorban, ahol $m \geq n$. Ebben az esetben a lehetséges tagok száma

$$\mathcal{P}(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \text{ (Hardy-Ramanujan-képlet).}$$

Az összes középső tag generálása

- Az összes középső tag (bővítés) generálására backtracking algoritmust használhatunk.
- A megoldástér az s szám r hosszúságú partícióinak halmaza, vagyis a megoldást $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ alakú sorozatok közt keressük, ahol $r = p + n$ és $\sum_{k=1}^r c_k = s = \sum_{j=1}^p a_j + \sum_{i=1}^n b_i$.
- Az előbbi tétel (explicit verzióját) használva kiszűrhetők a nem megfelelő sorozatok.
- **Legrosszabb eset:** generáljuk ki az összes középső tagot a $0 \rightarrow ml_0 \rightarrow l \rightarrow l_n \rightarrow 0$ rövid egzakt sorban, ahol $m \geq n$. Ebben az esetben a lehetséges tagok száma

$$\mathcal{P}(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \text{ (Hardy-Ramanujan-képlet).}$$

Az összes középső tag generálása

- Az összes középső tag (bővítés) generálására backtracking algoritmust használhatunk.
- A megoldástér az s szám r hosszúságú partícióinak halmaza, vagyis a megoldást $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ alakú sorozatok közt keressük, ahol $r = p + n$ és $\sum_{k=1}^r c_k = s = \sum_{j=1}^p a_j + \sum_{i=1}^n b_i$.
- Az előbbi tétel (explicit verzióját) használva kiszűrhetők a nem megfelelő sorozatok.
- **Legrosszabb eset:** generáljuk ki az összes középső tagot a $0 \rightarrow ml_0 \rightarrow l \rightarrow l_n \rightarrow 0$ rövid egzakt sorban, ahol $m \geq n$. Ebben az esetben a lehetséges tagok száma
$$\mathcal{P}(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \text{ (Hardy-Ramanujan-képlet).}$$

Az összes középső tag generálása

- Az összes középső tag (bővítés) generálására backtracking algoritmust használhatunk.
- A megoldástér az s szám r hosszúságú partícióinak halmaza, vagyis a megoldást $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ alakú sorozatok közt keressük, ahol $r = p + n$ és $\sum_{k=1}^r c_k = s = \sum_{j=1}^p a_j + \sum_{i=1}^n b_i$.
- Az előbbi tétel (explicit verzióját) használva kiszűrhetők a nem megfelelő sorozatok.
- **Legrosszabb eset:** generáljuk ki az összes középső tagot a $0 \rightarrow ml_0 \rightarrow l \rightarrow l_n \rightarrow 0$ rövid egzakt sorban, ahol $m \geq n$. Ebben az esetben a lehetséges tagok száma

$$\mathcal{P}(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \text{ (Hardy-Ramanujan-képlet).}$$

Az összes középső tag generálása

Példa

Izomorfizmus erejéig összesen 18 különböző Kronecker-modulus szerepelhet középső tagként egy

$0 \rightarrow l_5 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_1 \rightarrow l \rightarrow l_4 \oplus l_3 \oplus l_1 \oplus l_0 \rightarrow 0$ alakú rövid egzakt sorban:

$$\begin{array}{ll}
 l_5 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_0, & l_5 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1, \\
 l_5 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_0, & l_5 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1, \\
 l_5 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1, & l_4 \oplus l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_0, \\
 l_4 \oplus l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1, & l_4 \oplus l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_0, \\
 l_4 \oplus l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1, & l_4 \oplus l_4 \oplus l_4 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1, \\
 l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_0, & l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1, \\
 l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1, & l_4 \oplus l_4 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1, \\
 l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_0, & l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_1 \oplus l_1 \oplus l_1, \\
 l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_1, & l_4 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1.
 \end{array}$$

Az összes középső tag generálása

Példa

- 1 $A \ 0 \rightarrow I_{26} \oplus I_{12} \oplus I_{10} \oplus I_8 \oplus I_4 \rightarrow I \rightarrow I_{19} \oplus I_{15} \oplus I_8 \oplus I_4 \oplus I_1 \oplus I_1 \rightarrow 0$
rövid egzakt sorban a lehetséges középső tagok száma 102501 (2 másodperc).
- 2 $A \ 0 \rightarrow I_{20} \oplus I_{19} \oplus I_{18} \oplus I_{10} \oplus I_8 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_2 \rightarrow I \rightarrow I_{16} \oplus I_{11} \oplus I_7 \oplus I_6 \oplus I_3 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_0 \rightarrow 0$ rövid egzakt sorban a lehetséges középső tagok száma 3322698 (2 perc).

Legáltalánosabb eset

Tétel

Az $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}$, $c_1 \geq \dots \geq c_n \geq 0$, $n \geq 2$ feltételek mellett

$$[I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_n}] \in \{[I_{a_1}]\} * \dots * \{[I_{a_n}]\}$$

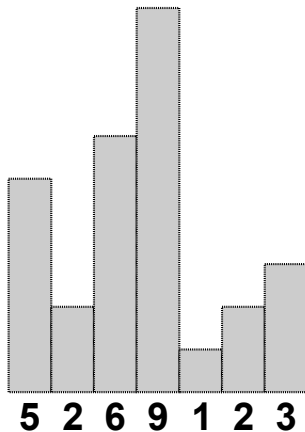
akkor és csak akkor, ha $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n$ permutáció és $\exists m_j^i \geq 0$ egészek, $1 \leq j < i \leq n$ úgy, hogy $\forall \ell \in \{1, \dots, n\}$

$$c_\ell = a_{\sigma(\ell)} + \sum_{i=\sigma(\ell)+1}^n m_{\sigma(\ell)}^i - \sum_{j=1}^{\sigma(\ell)-1} m_j^{\sigma(\ell)},$$

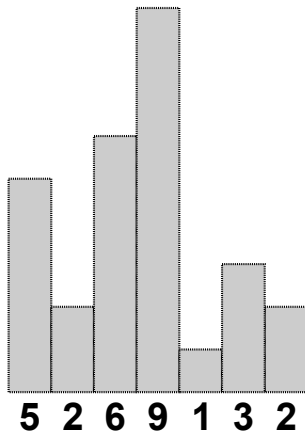
és teljesülnek a következők:

- (i) $m_j^i > 0 \implies \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$
- (ii) $a_j \geq a_i \implies \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$.

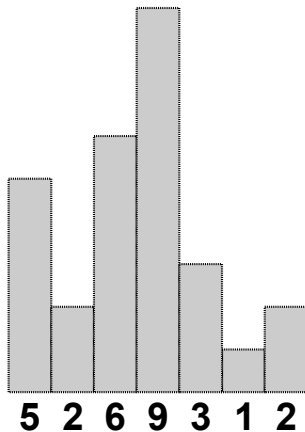
Legáltalánosabb eset (példa)



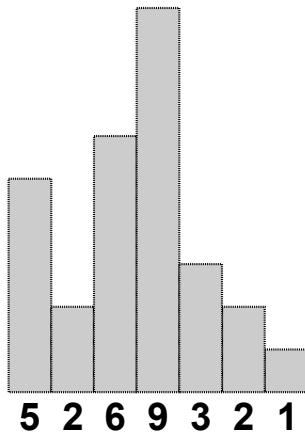
Legáltalánosabb eset (példa)



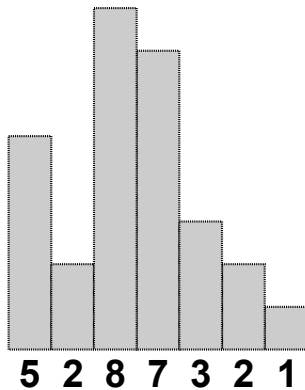
Legáltalánosabb eset (példa)



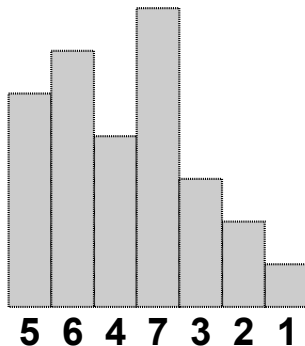
Legáltalánosabb eset (példa)



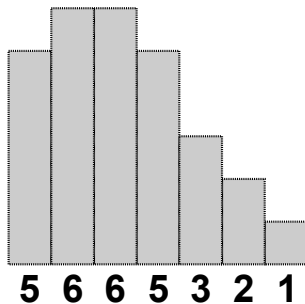
Legáltalánosabb eset (példa)



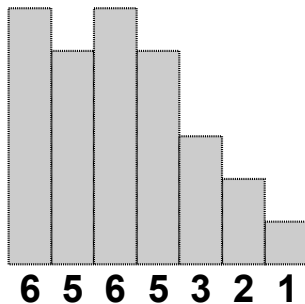
Legáltalánosabb eset (példa)



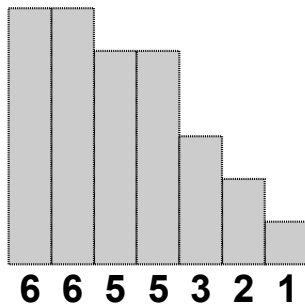
Legáltalánosabb eset (példa)



Legáltalánosabb eset (példa)



Legáltalánosabb eset (példa)



Rövid egzakt sorok ekvivalenciája

Tétel (Szöllősi I.)

Legyenek $q > n > 0$, $d_1 \geq \dots \geq d_q \geq 0$, $c_1 \geq \dots \geq c_{q-n} \geq 0$ és $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ sorozatok, $I = I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_{q-n}}$ és $I' = I_{d_1} \oplus \dots \oplus I_{d_q}$. Akkor és csak akkor létezik a

$$0 \rightarrow P_{a_1} \oplus \dots \oplus P_{a_n} \rightarrow I \rightarrow I' \rightarrow 0$$

alakú rövid egzakt sor, ha létezik egy

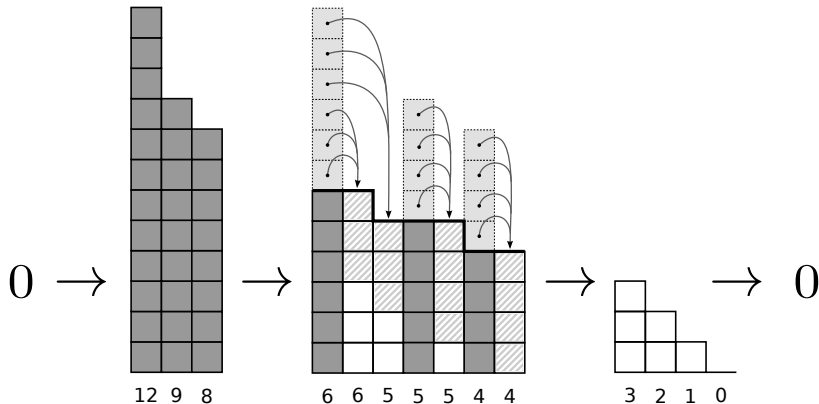
$$0 \rightarrow I^{(+d)} \rightarrow I'^{(+d)} \rightarrow I_{d-(a_1+1)} \oplus \dots \oplus I_{d-(a_n+1)} \rightarrow 0$$

rövid egzakt sor, ahol $a_n + 1 \leq d \in \mathbb{N}$ és $I^{(+d)} := I_{c_1+d} \oplus \dots \oplus I_{c_{q-n}+d}$,
 $I'^{(+d)} := I_{d_1+d} \oplus \dots \oplus I_{d_q+d}$.

Rövid egzakt sorok ekvivalenciája

Példa

$$0 \rightarrow I_{12} \oplus I_9 \oplus I_8 \rightarrow I_6 \oplus I_6 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_4 \oplus I_4 \rightarrow I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0 \rightarrow 0$$



Rövid egzakt sorok ekvivalenciája

Példa

Létezik a

$$0 \rightarrow P_0 \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \rightarrow I_8 \oplus I_5 \oplus I_4 \rightarrow I_2 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_0 \oplus I_0 \rightarrow 0$$

rövid egzakt sor, mert felírható a következő:

$$0 \rightarrow I_{12} \oplus I_9 \oplus I_8 \rightarrow I_6 \oplus I_6 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_4 \oplus I_4 \rightarrow I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0 \rightarrow 0.$$

Rövid egzakt sorok ekvivalenciája

Tétel (Szöllősi I.)

Legyen $\bar{k}$ egy algebrailag zárt test, $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ növekvő sorozat, P, P' és $P'' = P_{a_1} \oplus \dots \oplus P_{a_n}$ preprojektív, I, I' és $I'' = I_{a_n - a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_n - a_{n-1}} \oplus I_0$ preinjektív, illetve R, R' reguláris modulusok $\text{mod-}\bar{k}K$ -ban. Akkor és csak akkor létezik egy

$$0 \rightarrow P_{a_1} \oplus \dots \oplus P_{a_n} \rightarrow P \oplus R \oplus I \rightarrow P' \oplus R' \oplus I' \rightarrow 0$$

alakú rövid egzakt sor, ha létezik a

$$0 \rightarrow P \oplus R \oplus I^{(+d)} \rightarrow P' \oplus R' \oplus R'' \oplus I'^{(+d)} \rightarrow I_{a_n - a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_n - a_{n-1}} \oplus I_0 \rightarrow 0,$$

rövid egzakt sor, ahol $a_n + 1 \leq d \in \mathbb{N}$ és $R'' \in \text{mod-}\bar{k}K$ úgy, hogy $\text{Hom}(R', R'') = 0$ és $\dim R'' = ((\partial I - \partial I' + n)d, (\partial I - \partial I' + n)d)$.

Egy $\dim M = (a, b)$ dimenziójú $M \in \text{mod-}kK$ Kronecker-modulus **defektusa** $\partial M = b - a$.

Lineáris mátrixnyalábok

Meghatározás

Egy $A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(k[\lambda])$ alakú mátrixot **lineáris mátrixnyaláb**nak nevezünk (vagy csak egyszerűen **mátrixnyaláb**nak).

Meghatározás

Két $A + \lambda B, A' + \lambda B' \in \mathcal{M}_{m,n}(k[\lambda])$ mátrixnyaláb **szigorúan ekvivalens**, ha léteznek a konstans, nonszinguláris $P \in \mathcal{M}_m(k)$ és $Q \in \mathcal{M}_n(k)$ mátrixok úgy, hogy $A' + \lambda B' = P(A + \lambda B)Q$. A szigorú ekvivalenciát $A' + \lambda B' \sim A + \lambda B$ jelöli.

Lineáris mátrixnyalábok

Meghatározás

Egy $A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(k[\lambda])$ alakú mátrixot **lineáris mátrixnyaláb**nak nevezünk (vagy csak egyszerűen **mátrixnyaláb**nak).

Meghatározás

Két $A + \lambda B, A' + \lambda B' \in \mathcal{M}_{m,n}(k[\lambda])$ mátrixnyaláb **szigorúan ekvivalens**, ha léteznek a konstans, nonszinguláris $P \in \mathcal{M}_m(k)$ és $Q \in \mathcal{M}_n(k)$ mátrixok úgy, hogy $A' + \lambda B' = P(A + \lambda B)Q$. A szigorú ekvivalenciát $A' + \lambda B' \sim A + \lambda B$ jelöli.

Résznyalábok

Meghatározás

Egy $A' + \lambda B'$ mátrixnyaláb akkor és csak akkor **résznyalábja** $A + \lambda B$ -nek ha léteznek a $A_{12} + \lambda B_{12}$, $A_{21} + \lambda B_{21}$, $A_{22} + \lambda B_{22}$ nyalábok úgy, hogy

$$A + \lambda B \sim \begin{pmatrix} A' + \lambda B' & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a kisebbik mátrixnyaláb kiegészíthető a nagyobbikban.

Sorkiegészítésről beszélünk, ha az $A_{12}, B_{12}, A_{22}, B_{22}$ mátrixokat elhagyjuk, és oszlopkiegészítésről, ha az $A_{21}, B_{21}, A_{22}, B_{22}$ mátrixokat hagyjuk el.

Résznyalábok

Meghatározás

Egy $A' + \lambda B'$ mátrixnyaláb akkor és csak akkor **résznyalábja** $A + \lambda B$ -nek ha léteznek a $A_{12} + \lambda B_{12}$, $A_{21} + \lambda B_{21}$, $A_{22} + \lambda B_{22}$ nyalábok úgy, hogy

$$A + \lambda B \sim \begin{pmatrix} A' + \lambda B' & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a kisebbik mátrixnyaláb kiegészíthető a nagyobbikban.

Sorkiegészítésről beszélünk, ha az $A_{12}, B_{12}, A_{22}, B_{22}$ mátrixokat elhagyjuk, és oszlopkiegészítésről, ha az $A_{21}, B_{21}, A_{22}, B_{22}$ mátrixokat hagyjuk el.

Nyitott kérdés

Nyitott kérdés

Ha $A + \lambda B$, $A' + \lambda B'$ mátrixnyalábok $\mathbb{C}$ felett, adjuk meg a klasszikus Kronecker-invariánsok függvényében a szükséges és elégséges numerikus feltételrendszerét annak, hogy az $A' + \lambda B'$ résznyalábja legyen $A + \lambda B$ -nek. Szerkesszük meg az $A_{12} + \lambda B_{12}$, $A_{21} + \lambda B_{21}$, $A_{22} + \lambda B_{22}$ kiegészítéseket is.

Mátrixnyalábok kanonikus alakja

Minden mátrixnyaláb szigorúan ekvivalens egy kanonikus blokkdiagonális alakkal, amit a következő *klasszikus Kronecker-invariánsok*kal jellemezhetünk:

- 1 sor-minimális indexek
- 2 oszlop-minimális indexek
- 3 véges és végtelen elemi osztók

Mátrixnyalábok kanonikus alakja

Minden mátrixnyaláb szigorúan ekvivalens egy kanonikus blokkdiagonális alakkal, amit a következő *klasszikus Kronecker-invariánsok*kal jellemezhetünk:

- 1 sor-minimális indexek
- 2 oszlop-minimális indexek
- 3 véges és végtelen elemi osztók

Mátrixnyalábok kanonikus alakja

Minden mátrixnyaláb szigorúan ekvivalens egy kanonikus blokkdiagonális alakkal, amit a következő *klasszikus Kronecker-invariánsok*kal jellemezhetünk:

- 1 sor-minimális indexek
- 2 oszlop-minimális indexek
- 3 véges és végtelen elemi osztók

Mátrixnyalábok kanonikus alakja

Minden mátrixnyaláb szigorúan ekvivalens egy kanonikus blokkdiagonális alakkal, amit a következő *klasszikus Kronecker-invariánsok*kal jellemezhetünk:

- 1 sor-minimális indexek
- 2 oszlop-minimális indexek
- 3 véges és végtelen elemi osztók

Mátrixnyaláb $\iff$ Kronecker-modulus

Mátrixnyaláb	Mátrixpár	A Kronecker-tegez reprezentációja
$A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(k[\lambda])$	$A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$	$k^m \begin{array}{c} \xleftarrow{A} \\ \xleftarrow{B} \end{array} k^n$

Mátrixnyalábok mint Kronecker-modulusok

Klasszikus Kronecker-invariánsok	Kronecker-invariánsok	A modulus típusa
Sor-minimális indexek	$A (c_1, \dots, c_n)$ növekvő sorozat	preprojektív
Oszlop-minimális indexek	$A (d_1, \dots, d_n)$ csökkenő sorozat	preinjektív
Véges és végtelen elemi osztók	$A \mu^{(p)}, p \in k$ és λ^∞ nemnulla partíciók	reguláris
Felírható a mátrixnyaláb a kanonikus alakban	Meghatározzák a Kronecker-modulust (izomorfizmus erejéig)	

Egy mátrixnyaláb kanonikus alakban:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & & & & & \\ & & \lambda & 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \lambda & 1 & & & & & \\ & & & \lambda & 0 & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & \lambda & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \lambda & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \lambda & & \\ & & & & & & & \lambda + 2 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

A megfelelő Kronecker-modulus:

$$(P_0 \oplus P_0 \oplus P_2) \oplus (R_0(2) \oplus R_2(2) \oplus R_\infty(3)) \oplus (I_2 \oplus I_1 \oplus I_0)$$

Mátrixnyalábok mint Kronecker-modulusok

Mátrixnyalábok	Kronecker-modulusok
$A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(k[\lambda])$	$M_{A,B} : k^m \begin{smallmatrix} \xleftarrow{A} \\ \xleftarrow{B} \end{smallmatrix} k^n .$
$A + \lambda B \sim A' + \lambda B'$	$M_{A,B} \cong M_{A',B'}$
$A' + \lambda B'$ résznyalábja $A + \lambda B$ -nek	$M_{A',B'}$ részfaktora $M_{A,B}$ -nek

Meghatározás

$M_{A',B'}$ részfaktora $M_{A,B}$ -nek, ha létezik egy N modulus úgy, hogy $M_{A',B'} \leftarrow N \hookrightarrow M_{A,B}$ vagy (ekvivalens módon) ha létezik L úgy, hogy $M_{A',B'} \hookrightarrow L \leftarrow M_{A,B}$.

Mátrixnyalábok mint Kronecker-modulusok

Mátrixnyalábok	Kronecker-modulusok
$A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(k[\lambda])$	$M_{A,B} : k^m \begin{smallmatrix} \xleftarrow{A} \\ \xleftarrow{B} \end{smallmatrix} k^n .$
$A + \lambda B \sim A' + \lambda B'$	$M_{A,B} \cong M_{A',B'}$
$A' + \lambda B'$ résznyalábja $A + \lambda B$ -nek	$M_{A',B'}$ részfaktora $M_{A,B}$ -nek

Meghatározás

$M_{A',B'}$ részfaktora $M_{A,B}$ -nek, ha létezik egy N modulus úgy, hogy $M_{A',B'} \leftarrow N \hookrightarrow M_{A,B}$ vagy (ekvivalens módon) ha létezik L úgy, hogy $M_{A',B'} \hookrightarrow L \leftarrow M_{A,B}$.

A résznyaláb-probléma moduláris megközelítése

Ötlet:

- Tanulmányozzuk a Kronecker-modulusok közt felírható rövid egzakt sorokat
- Jellemezzük a lehetséges középső tagokat explicit numerikus feltételekkel
- Szerkesszük meg az „összekötő modulust” (egy olyan L modulust, amire teljesül: $M_{A',B'} \hookrightarrow L \leftarrow M_{A,B}$)

A résznyaláb-probléma moduláris megközelítése

Ötlet:

- Tanulmányozzuk a Kronecker-modulusok közt felírható rövid egzakt sorokat
- Jellemezzük a lehetséges középső tagokat explicit numerikus feltételekkel
- Szerkesszük meg az „összekötő modulust” (egy olyan L modulust, amire teljesül: $M_{A',B'} \hookrightarrow L \leftarrow M_{A,B}$)

A résznyaláb-probléma moduláris megközelítése

Ötlet:

- Tanulmányozzuk a Kronecker-modulusok közt felírható rövid egzakt sorokat
- Jellemezzük a lehetséges középső tagokat explicit numerikus feltételekkel
- Szerkesszük meg az „összekötő modulust” (egy olyan L modulust, amire teljesül: $M_{A',B'} \hookrightarrow L \leftarrow M_{A,B}$)

A résznyaláb-probléma moduláris megközelítése

Ötlet:

- Tanulmányozzuk a Kronecker-modulusok közt felírható rövid egzakt sorokat
- Jellemezzük a lehetséges középső tagokat explicit numerikus feltételekkel
- Szerkesszük meg az „összekötő modulust” (egy olyan L modulust, amire teljesül: $M_{A',B'} \hookrightarrow L \leftarrow M_{A,B}$)

$$I' \hookrightarrow I \leftarrow I''$$

Tétel (Szántó Cs., Szöllősi I.)

Legyenek $I' = a_n l_n \oplus \cdots \oplus a_0 l_0$ és $I = c_n l_n \oplus \cdots \oplus c_0 l_0$ ($n_1 \geq 1$) preinjektív Kronecker-modulusok. I' akkor és csak akkor részfaktora I -nek (vagyis $\exists L$ úgy, hogy $I' \hookrightarrow L \leftarrow I$) ha

$$b_1 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (i+1)c_i - \sum_{i=2}^n (i+1)b_i \right) \quad \text{és} \quad b_0 \geq a_0,$$

ahol

$$b_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^n (i+1)c_i - \sum_{i=1}^n (i+1)b_i & k=0 \\ \sum_{i=1}^n i a_i - \sum_{i=2}^n i b_i & k=1 \\ \left[\min \left(\frac{\sum_{i=k}^n i a_i - \sum_{i=k+1}^n i b_i}{k}, \frac{\sum_{i=k}^n (i+1)c_i - \sum_{i=k+1}^n (i+1)b_i}{k+1} \right) \right] & 2 \leq k < n \\ \min(a_n, c_n) & k=n \end{cases}.$$

Példa

Példa

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & & & \\ & & & \lambda & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & \lambda & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \lambda & 1 & \\ & & & & & & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{10,14}(\mathbb{C}[\lambda])$$

$$M_{A,B} = I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \oplus I_1$$

Példa

Példa

$$A' + \lambda B' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{8,12}(\mathbb{C}[\lambda]).$$

$$M_{A',B'} = I_5 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0$$

Példa

Példa

$$L_1 + \lambda L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & \lambda & 1 & & & \\ & & & & & & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & & & & & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{8,14}(\mathbb{C}[\lambda]).$$

$$L = l_3 \oplus l_2 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus l_0 \oplus l_0$$

Példa

Példa

$$D_2(A + \lambda B)C' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A' + \lambda B' & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{pmatrix}$$

Példa

Példa

$$A_{12} + \lambda B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} + \lambda B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} + \lambda B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Példa

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Példa

Példa

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ellenpélda...

$\bullet (5, 1, 1, 1, 0, 0) \ll (6, 2, 2, 0)$ (feltevések)

$A(\lambda) \in \#[\mathbb{C}]^{(n \times (m+n))}$ $M(\lambda) \in \#[\mathbb{C}]^{(n \times (n+m+2))}$

$(c_1, c_2, \dots, c_m) = (5, 1, 1, 1, 0, 0)$, $m=6$, $c=4$, $n = \text{rank } A(\lambda) = 3$

$(d_1, d_2, \dots, d_{m+s}) = (6, 2, 2, 0)$, $m+s=4$, $d=3$, $n+s = \text{rank } M(\lambda) = 10$, $s=2$

$(a_1, a_2) = \left(\sum_{i=1}^{s-1} n_i + d(\gamma_{m+s}) - 1, d(\gamma_{m+s-2+1}) - 1 \right) = (-1, -1)$

Building the sets $S \subseteq \{1, \dots, m\}$ and $D \subseteq \{1, \dots, m+s\}$

$(c_1, \dots, c_m) \cup (d_1, \dots, d_{m+s}) = (6, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$

$\bullet S := \emptyset, D := \emptyset$

$d+1 = 4 \notin D$. $4 = c < d+s-2 = 3+2-0=5 \Rightarrow 5 \in S$ and $6 \notin S \Rightarrow S = \{5\}$

$1: c_j = c_5 = 1 \Rightarrow j=5$. $\sum_{i \in S} c_i - \sum_{i \in D} c_i = 1-0=1 > \sum_{d_i \in 1} d_i - \sum_{d_i \in 1} d_i = 0-0=0 \Rightarrow S = \{5\}$

$\# \{i \in S \mid i > 5\} = 1 < \# \{i \in D \mid d_i \leq 1\} + \# \{i \mid q_i \leq 1\} = 0+2 \Rightarrow c_5$ -blockade

$2: c_j = c_3 = 1 \Rightarrow j=3$. $\sum_{i \in S} c_i - \sum_{i \in D} c_i = 2-1=1 > \sum_{d_i \in 1} d_i - \sum_{d_i \in 1} d_i = 0-0=0 \Rightarrow S = \{3, 5\}$

$\# \{i \in S \mid i > 3\} = 2 \geq \# \{i \in D \mid d_i \leq 1\} + \# \{i \mid q_i \leq 1\} = 0+2 \Rightarrow c_3$ -problematic one

$3: c_j = c_2 = 1 \Rightarrow j=2$. $\sum_{i \in S} c_i - \sum_{i \in D} c_i = 3-2=1 > \sum_{d_i \in 1} d_i - \sum_{d_i \in 1} d_i = 0-0=0 \Rightarrow S = \{2, 3, 5\}$

$\# \{i \in S \mid i > 2\} = 3 \geq \# \{i \in D \mid d_i \leq 1\} + \# \{i \mid q_i \leq 1\} = 0+2 \Rightarrow c_2$ -problematic one

Alkalmazások

A résznyaláb-problémának mérnöki alkalmazásai vannak:

- Kontrollelméletben (lineáris dinamikai rendszerek)
- Fizikában (áramkörök tervezése, bizonyos folyamatok modellezése, stb.)
- Az $A - \lambda I$ sajátérték-probléma általánosítása

Alkalmazások

A résznyaláb-problémának mérnöki alkalmazásai vannak:

- Kontrollelméletben (lineáris dinamikai rendszerek)
- Fizikában (áramkörök tervezése, bizonyos folyamatok modellezése, stb.)
- Az $A - \lambda I$ sajátérték-probléma általánosítása

Alkalmazások

A résznyaláb-problémának mérnöki alkalmazásai vannak:

- Kontrollelméletben (lineáris dinamikai rendszerek)
- Fizikában (áramkörök tervezése, bizonyos folyamatok modellezése, stb.)
- Az $A - \lambda I$ sajátérték-probléma általánosítása

Alkalmazások

A résznyaláb-problémának mérnöki alkalmazásai vannak:

- Kontrollelméletben (lineáris dinamikai rendszerek)
- Fizikában (áramkörök tervezése, bizonyos folyamatok modellezése, stb.)
- Az $A - \lambda I$ sajátérték-probléma általánosítása