Frakcionális Brown mozgás által vezérelt sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásának közelítése

Soós Anna

Babes-Bolyai Tudományegyetem
asoos@math.ubbcluj.ro
2014.10.15.

fBm közelítése

fBm által vezérelt sztochasztikus differenciálegyenlet

fBm általánosításai

$\Big(B(t)\Big)_{t\geq 0}$ fBm, $H > \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} dX(t) &= F(X(t),t)dt + G(X(t),t)dB(t), \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol X_0 véletlen vektor $\mathbb{R}^n$-ben, F és G 1-valószínűséggel:

(C1) $F \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T], \mathbb{R}^n), G \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T], \mathbb{R}^n)$;

(C2) $F(\cdot,t), \dfrac{\partial G(\cdot,t)}{\partial x^i}, \dfrac{\partial G(\cdot,t)}{\partial t}$ helyi Lipschitz tulajdonságú $\forall t \in [0,T], i \in \{1,\dots,n\}$.

- a $B = \Big(B(t)\Big)_{t\in[0,1]}$, $H \in (0,1)$ fBm közelítése:
- az (1)-t közelítése, $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} dX_N(t) &= F(X_N(t),t)dt + G(X_N(t),t)dB_N(t), \\ X_N(t_0) &= X_0, \end{aligned} \tag{2}$$

- (2)-nek $\exists$ helyi megoldása, mely valószínűségben (1) megoldásához tart azon az intervallumon, ahol a megoldás létezik.

$H \in (0,1)$ **Hurst indexű frakcionális Brown mozgás (fBm)** Gauss folyamat $B = \Big(B(t)\Big)_{t \geq 0}$,

$$E\Big(B(s)B(t)\Big) = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}\Big).$$

$H = \frac{1}{2}$: standard Bm.

fBm tulajdonságai

- $[0, T]$-n Hölder folytonos $\gamma \in (0, H)$ praméterrel

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \sup_{\substack{0<t-s<h(\omega) \\ t,s\in[0,T]}} \frac{|B(t)-B(s)|}{|t-s|^{\gamma}} \leq \delta\right) = 1,$$

  ahol h pozitív vaószónűségi változó és $\delta > 0$.

- négyzetes varációja $[a, b] \subseteq [0, T]$-n

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)\right)^2 = \begin{cases} \infty & \text{if } H < \frac{1}{2}, \\ b-a & \text{if } H = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{if } H > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

  ahol $\Delta_n = (a = t_0^n < \cdots < t_n^n = b)$ az $[a, b]$ felosztása

Wavelet közelítés

Y. Meyer, F. Sellan, M. S. Taqqu
A. Ayache and M. S. Taqqu

$$B(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{j}{2}} (\Psi(2^j t - k) - \Psi(-k)) \varepsilon_{j,k},$$

$\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ az **anya függvény**: $\exists\, c > 0$ ú.h.

$$|\Psi(t)| \leq \frac{c}{(2+|t|)^2}, \qquad |\Psi'(t)| \leq \frac{c}{(2+|t|)^3}$$

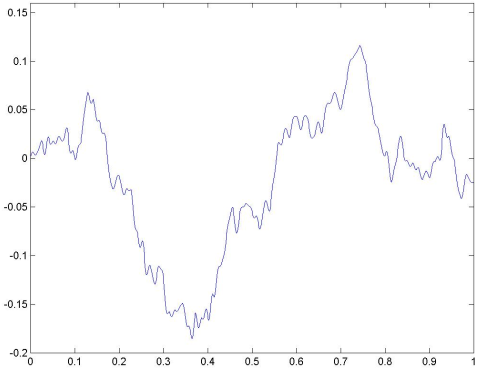
$\varepsilon_{j,k}$ $\mathcal{N}(0,1)$ **vv.**

$$B_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k \in I_{N,j}} 2^{-\frac{j}{2}} (\Psi(2^j t - k) - \Psi(-k)) \varepsilon_{j,k}$$

$$I_{N,j} = \left\{ k \in \mathbb{Z} : |k| \leq \frac{2^{N+4}}{(N-j+1)^2} \right\}$$

Tétel

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |B_N(t) - B(t)| = 0 \right) = 1$$



$$H = 0.9$$

Figure: B_N közelítése fBm-nek

fBm közelítése trigonometriai sorral

Bessel függvény J_ν, $\nu \neq -1, -2, \ldots$ a $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi\}$:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} .$$

$\nu > -1$-re, J_ν vaós gyökei
J_{-H}: $x_1 < x_2 < \ldots$
J_{1-H}: $y_1 < y_2 < \ldots$

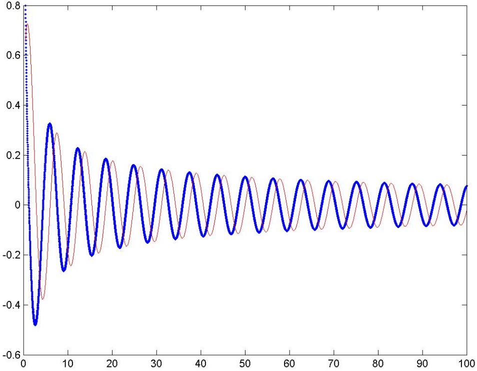


Figure: Bessel függvény: J_{-H} (with '·'), J_{1-H} (with '-'), $H = 0.65$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Gauss v.v.

$$E(X_n) = E(Y_n) = 0$$

$$\mathrm{Var}X_n = \frac{2c_H^2}{x_n^{2H} J_{1-H}^2(x_n)}, \quad \mathrm{Var}\,Y_n = \frac{2c_H^2}{y_n^{2H} J_{-H}^2(y_n)},$$

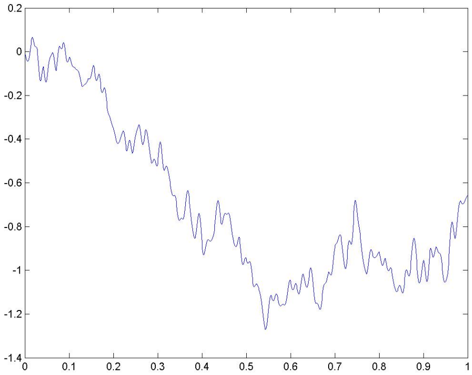
ahol

$$c_H^2 = \frac{\sin(\pi H)}{\pi}\Gamma(1+2H).$$

K. Dzhaparidze és H. van Zanten

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(y_n t)}{y_n} Y_n, \quad t \in [0, 1]$$

-abszolút konvergens sor $t \in [0, 1]$-ben
-fBm



$$H = 0.65$$

Figure: B_N közeítése fBm-nek

$$B_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} X_n + \sum_{n=1}^{N} \frac{1-\cos(y_n t)}{y_n} Y_n, \quad t \in [0,1], \tag{3}$$

Tétel

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |B_N(t) - B(t)| = 0 \right) = 1$$

Frakcionális integrál és derivált

S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev:
$f \in L_1(a,b)$, $\alpha > 0$ -re α-rendű **bal oldali frakcionális Rieman-Liouville integrálja** f-nek (a,b)-n

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy \text{ a.e. } x$$

α-rendű **jobb oldali frakcionális Rieman-Liouville integrálja** f-nek

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (y-x)^{\alpha-1} f(y) dy \text{ a.e. } x$$

α-rendű **bal oldali Riemann Liouville deriváltja** f-nek α

$$D^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha \int_a^x \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}} dy \right) \mathbb{I}_{(a,b)}(x)$$

let $p > 1$, $0 < \alpha < 1$
$f \in \boldsymbol{I^{\alpha}_{a+}(L_p(a,b))}$:

$$f = I^{\alpha}_{a+}\Phi \text{ ahol } \Phi \in L_p(a,b) \iff D^{\alpha}_{a+} f = \Phi$$

jobb oldali Riemann Liouville deriváltja g-nek

$$D^{\alpha}_{b-}g(x) = \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{g(x)}{(b-x)^{\alpha}} + \alpha\int_x^b \frac{g(x)-g(y)}{(y-x)^{\alpha+1}}dy\right)\mathbb{I}_{(a,b)}(x)$$

$g \in$ $\boldsymbol{I^{\alpha}_{b-}(L_p(a,b))}$:

$$g = I^{\alpha}_{b-}\Phi \text{ with } \Phi \in L_p(a,b) \Longleftrightarrow D^{\alpha}_{b-}g = \Phi$$

M. Zähle

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$ **frakcionális integrálja** f-nek g-szerint

Ha $f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha}(L_p(a,b))$, $g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha}(L_q(a,b))$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dg(x) &= (-1)^{\alpha} \int_a^b D_{a+}^{\alpha} f_{a+}(x) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(x)dx \\ &\quad + f(a+)(g(b-) - g(a+)) \end{aligned}$$

$$f_{a+}(x) = f(x) - f(a+), \quad g_{b-}(x) = g(x) - g(b-)$$

Sztochasztikus integrál közelítése

$$\int_0^T G(u)dB(u) = (-1)^\alpha \int_0^T D_{0+}^\alpha G_{0+}(u) D_{T-}^{1-\alpha} B_{T-}(u)du + G(0+)B(T),$$

ahol $G_{0+} \in I_{0+}^\alpha(L_2(0,T))$, $B_{T-} \in I_{T-}^{1-\alpha}(L_2(0,T))$

Tétel

$\alpha \in (1-H, 1)$. G teljesíti:

(1) $G_{0+} \in I^{\alpha}_{0+}(L_2(0,T))$;

(2) $\int_0^T |D^{\alpha}_{0+} G_{0+}(u)| du < \infty$;

(3) $\int_0^T \frac{|D^{\alpha}_{0+} G_{0+}(u)|}{(T-u)^{1-\alpha}} du < \infty$.

ekkor

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^t G(u) dB_N(u) = \int_0^t G(u) dB(u) \quad \forall \quad t \in [0,T].$$

Tétel

B fBm, B_N közelítése, (C1) és (C2) teljesül. $t_0 \in (0, T]$
Ekkor

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(X(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} G(X(s), s)dB(s),$$

$$X_N(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(X_N(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} G(X_N(s), s)dB_N(s), \quad N \in \mathbb{N}$$

létezik mindkét egyenletnek megoldása (t_1, t_2)*-n és*

$$P(\lim_{N \to \infty} \sup_{t \in (t_1, t_2)} \|X_N(t) - X(t)\| = 0) = 1.$$

Lépcsős fBm

- mérnöki
- biofizika
- gazdasági modellezésben

$H : \mathbb{R} \to]0, 1[$

$$H(t) = \sum_{i=0}^{K} a_i \mathbf{1}_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t),$$

ahol $\tau_o = -\infty$, $\tau_{K+1} = \infty$,, $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_K$ növekvő és $a_i \in [0, 1]$.

Wavelet közelítés $(B(t))_{t\in[0,1]}$-re

$\{2^{j/2}\Psi(2^j x - k) : (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ Lamarie Meyer wavelet $L^2(\mathbb{R})$-ben, Ψ:

Ψ_1

$$\Psi_1(x,\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \frac{\overline{\Psi}(y)}{|y|^{\theta+\frac{1}{2}}} dy,$$

Ayache,A.,Bertrand,P.R., Levy Vehel,J

$$B(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-jH(k/2^j)} (\Psi_1(2^j t - k, H(k/2^j)) - \Psi_1(-k, H(k/2^j)))\epsilon_{j,k} \tag{4}$$

ahol $\epsilon_{j,k}$ i.i.d.

Ahol Ψ: $\Psi \in C^1$, $\exists\, c > 0$

$$|\sup_{\theta\in[a,b]} \Psi_1(t,\theta)| \leq \frac{c}{(2+|t|)^2} \tag{5}$$

$$|\sup_{\theta\in[a,b]} {\Psi_1}'(t,\theta)| \leq \frac{c}{(2+|t|)^3}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

-*magas frekvenciájú komponens*

$$V_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-jH(k/2^j)} (\Psi_1(2^j t - k, H(k/2^j)) - \Psi_1(-k, H(k/2^j))) \epsilon_{j,k}$$

alacsony frekvenciájú komponens

$$V_2(t) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-jH(k/2^j)} (\Psi_1(2^j t - k, H(k/2^j)) - \Psi_1(-k, H(k/2^j))) \epsilon_{j,k}.$$

$$B(t) = V_1(t) + V_2(t) \forall t \in [0, 1].$$

$N \in \mathbb{N}$.

$$B_1^N(t) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{|k| \leq \frac{2^{N+4}}{(N-j+1)^2}} 2^{-jH(k/2^j)} (\Psi_1(2^j t - k, H(k/2^j)) - \Psi_1(-k, H(k/2^j))) \epsilon_j$$

és

$$B_2^N(t) = \sum_{j=-2^{[N/2]}}^{-1} \sum_{|k| \leq 2^{[N/2]}} 2^{-jH(k/2^j)} (\Psi_1(2^j t - k, H(k/2^j)) - \Psi_1(-k, H(k/2^j)))$$

$$B_N(t) = B_1^N(t) + B_2^N(t) \forall t \in [0, 1]. \tag{6}$$

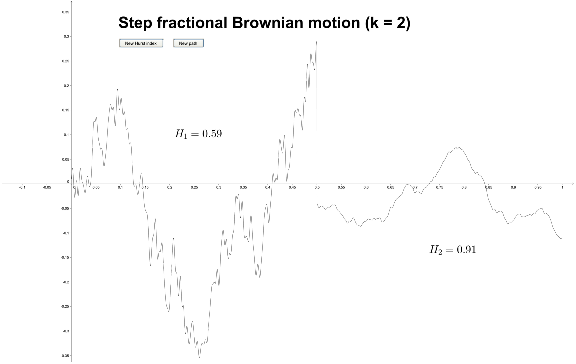


Figure: B_N közelítése sfBm-nek

References

Ayache,A.,Bertrand,P.R., Levy Vehel,J., *A central limit theorem for generalized quadratic variation of the step fractional Brownian motion*, *SISP*, **10**, (2007), 1-27.

A. Ayache,A., Taqqu,M. S., *Rate optimality of wavelet series approximations of fractional Brownian motion*,Jour. Fourier Anal. Appl. **9** (2003), 451-471.

Benassi,A.,Bertrand,P.R., Cohen,S. Istas,J., *Identification of the Hurst index of a step fractional Brownian motion*, Stat.Inference Stoch. Proc. **3**, 1/2 (2000),101-111.

Bender, C., Sottinen, T., Valkeila, E., *Pricing by Hedging and no Arbitrage beyond Semimartingales,* Finance Stoch. **12** (2008), 441-468.

Meyer,Y., Sellan,F., Taqqu, M.R., *Wavelets, generalized white noise and fractional integration: the synthesis of fractional Brownian motion* The Journal of Fourier Analysis and Applications, **5** (1999), 465-494.

Lisei, H.,Soós, A, *Approximation of Stochastic Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion*, Seminar on stochastic analysis, random fields and applications V, Progress in Probability 59, Birkhäuser Verlag 2007,pp. 229-244

Robu, J., Soós, A, *Approximation of Stochastic Differential Equations Driven by Step Fractional Brownian Motion,* Annales Univ. Sci.Budapest, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 37 (2012) 339-354.

- Samko,S.G., Kilbas,A.A., Marichev,O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach (1993).
- Zähle, M.,*Integration with respect to Fractal Functions and Stochastic Calculus I.*, Probab.Theory Relat. Fields, **111** (1998), 333-374.
- Zähle, M., *Integration with respect to Fractal Functions and Stochastic Calculus II.*, Math. Nachr. **225** (2001), 145-183.