Összefoglaló feladatok

Algebra, IX-X. osztály

1. Racionalizáld a következő törtek nevezőjét:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{3}+1}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[n]{4}-3\sqrt[n]{2}+2}$; **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$.

2. Tárgyald a $\left|\dfrac{mx+1}{x-2}\right|>1$ egyenlőtlenséget!

3. Tárgyald a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{m-\sqrt{m+x}}=x$; **b)** $\sqrt{a^2x^2+1}>ax$.

4. Határozd meg az $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ x+y+z=11 \end{cases}$ rendszer megoldásait a természetes számok halmazában!

5. Oldd meg az

$$\begin{cases} y=x^2+3x+1 \\ z=y^2+3y+1 \\ x=z^2+3z+1 \end{cases}$$

egyenletrendszert, ha $x,y,z\in\mathbb{R}$.

6. Oldd meg az

$$\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=9 \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}=1 \end{cases}$$

egyenletrendszert a pozitív valós számok halmazában!

7. Oldd meg az $\begin{cases} 2y=x+\dfrac{2}{x} \\ 2z=y+\dfrac{2}{y} \\ 2x=z+\dfrac{2}{z} \end{cases}$ egyenletrendszert, ha $x,y,z\in\mathbb{R}$.

8. Oldd meg az $\begin{cases} x+y=3z \\ x^2+y^2=5z \\ x^3+y^3=9z \end{cases}$ egyenletrendszert a valós számok halmazában!

9. Oldd meg az $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=12 \\ xy+yz+zx=12 \end{cases}$ egyenletrendszert a valós számok halmazában!

10. Legalább mekkora és legfeljebb mekkora a $\frac{3x+5,03}{4}=\frac{2x-3}{1,75}$ egyenlet gyöke, ha figyelembe vesszük, hogy az előforduló tizedes számok kerekítéssel jöttek létre?

11. Egy sakk körversenyen (minden mérkőzésen 1 pontot kap a nyertes, 0 pontot a vesztes illetve döntetlen esetén 0,5 – 0,5 pontot kap mindkettő) csak nagymesterek és mesterek vettek részt. Az utóbbiak száma 3-szor annyi volt, mint a nagymestereké, elért pontjaik együttes száma pedig 1,2-szerese a nagymesterek pontszámai összegének. Hányan vettek részt a versenyen? Mit mondhatunk az első három helyezettről?

12. Egy egyfordulós körmérkőzéses pingpongbajnokság győzteséről tudjuk, hogy mérkőzéseinek több, mint 68 és kevesebb, mint 69 százalékát nyerte meg. Legalább hányan indultak a bajnokságon?

13. Bizonyítsd be, hogy az $(n+1)(n+2)\cdot...\cdot(2n)$ szorzatban a 2 kitevője pontosan n.

14. Bizonyítsd be, hogy minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén 2^n-nek létezik olyan egész számú többszöröse, amely csak az 1 és 2 számjegyekből áll.

15. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{1+\sqrt{2+\ ...\ +\sqrt{n}}}<2$ bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

16. Oldd meg a $3^x+4^x=5^x$ egyenletet!

17. Oldd meg a $8^x+6^x=12^x+9^x$ egyenletet!

18. Oldd meg a $4^x+9^x+16^x=6^x+8^x+12^x$ egyenletet!

19. Oldd meg a $2^{2^x}=2x+2$ egyenletet!

20. Oldd meg a $3^x+5^x=2\cdot4^x$ egyenletet!