Lineáris algebra

2015. november 7.

1. Legyen $V = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ a következő műveletekkel: $x \perp y = xy$, $k \top x = x^k$, $\forall k \in \mathbb{R}$ és $\forall x, y \in V$. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{R}, V, \perp, \top)$ vektortér.

2. A következő halmazok közül melyek részterei $\mathbb{R}^3$-nak?

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$;

   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 \text{ vagy } z = 0\}$;

   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$;

   (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$;

   (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 1\}$;

   (f) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = z\}$;

3. A következő állítások közül melyek igazak?

   (a) $[-1, 1]$ résztere ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$-nek;

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ résztere ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$-nek;

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ résztere ${}_{\mathbb{Q}}\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$-nak;

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ résztere ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$-nek;

   (e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ folytonos}\}$ résztere ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$-nek;

4. Bizonyítsuk be, hogy a következő vektorok lineárisan függetlenek:

   (a) $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 2, 1)$, $v_3 = (3, 1, 1)$ az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérben;

   (b) $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 3, 4, 1)$, $v_3 = (3, 4, 1, 2)$, $v_4 = (4, 1, 2, 3)$ az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ vektortérben.

5. Legyenek $v_1 = (1, a, 0)$, $v_2 = (a, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, a)$ vektorok az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$-ból. Határozzuk meg $a \in \mathbb{R}$-t úgy, hogy v_1, v_2, v_3 lineárisan függetlenek legyenek!

6. Legyenek $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$ és $v_3 = (1, 1, 1)$ vektorok az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérben.

   (a) Mutassuk meg, hogy $B = (v_1, v_2, v_3)$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban;

   (b) Írjuk fel az $E = (e_1, e_2, e_3)$ kanonikus bázis vektorait a B bázisban;

   (c) Írjuk fel az $u = (1, -1, 2)$ vektort mindkét bázisban.

7. Legyenek $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, illetve $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ és $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ bázisai $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$-nek és határozzuk meg $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vektor koordinátáit mindkét bázisban.

8. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ vektortér, adjunk egy bázist és határozzuk meg a dimenzióját. Hasonlítsuk össze a $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ vektortérrel.

9. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 6x_4 & = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 & = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 & = 3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 & = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 & = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \hat{2}x_1 + x_2 - \hat{2}x_3 & = \hat{1} \\ \hat{2}x_1 + \hat{2}x_2 + \hat{2}x_3 & = \hat{0} \\ x_1 + \hat{4}x_2 + \hat{2}x_3 & = \hat{2} \end{cases}$, $(K = \mathbb{Z}_5)$

10. Tárgyaljuk a következő egyenletrendszert az $m \in \mathbb{R}$ valós paraméter függvényében (és oldjuk meg általánosan, mikor lehetséges):

$$\begin{cases} 3x + 4y + mz & = 4 \\ 4x + my + 3z & = 6 \\ mx + 3y + 4z & = 3 + m \end{cases}.$$