Gyakorlatok és feladatok

1. Határozd meg a következő, rekurzívan értelmezett sorozatok általános tagját:

a) $x_0 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1+2x_n} \quad \forall n \geq 0$; (felvételi feladat,1991., Temesvár)

b) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt[3]{1+x_n^3}} \quad \forall n \geq 0$; (felvételi feladat, 1993., Temesvár)

c) $x_0 = 3, x_1 = 4 \quad x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n \quad \forall n \geq 1$;

d) $x_0 = 1, x_1 = 2 \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6\sqrt{x_{n-1}}} \quad \forall n \geq 1$;

e) $x_1 = 3, x_2 = 2 \quad x_{n+2} + \frac{1}{x_n} = 2 \quad \forall n \geq 1$.

2. Határozd meg a következő sorozatok általános tagjának képletét:

a) $x_{n+2} = 5 \cdot x_{n+1} - 6 \cdot x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{13}{5}$;

b) $6x_{n+2} = 5 \cdot x_{n+1} - x_n$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{5}{36}$;

c) $x_{n+2} = 4 \cdot x_{n+1} - 4 \cdot x_n$, $x_1 = 6$, $x_2 = 20$;

d) $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

3. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat tagjai teljesítik az $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$ rekurziót, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor

$$x_{n+1}^2 - a \cdot x_{n+1} \cdot x_n - b \cdot x_n^2 = (-1)^{n+1} b^{n-1}\left(x_2^2 - ax_2x_1 - bx_1^2\right).$$

4. Határozd meg az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagjának képletét, ha

$$\frac{5}{x_n} = \frac{3}{x_{n+1}} + \frac{2}{x_{n-1}}, \ \forall\, n \geq 2.$$

5. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan x_1 egész szám létezik, amelyből kiindulva az $x_{n+1} = 2x_n \pm \sqrt{3x_n^2 + 1}$ rekurziót teljesítő sorozat tagjai egész számok összes (az előjeleket minden lépésben tetszőlegesen megválaszthatjuk)!

(Radó Ferenc Emlékverseny 2002.)

6. Határozd meg az összes olyan egész számsorozatot, amely teljesíti az $x_{n+2} = \frac{n \cdot x_n + 1}{x_n + n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ összefüggéseket!

7. Bizonyítsd be, hogy az $x_{n+1} = \frac{2}{2 - x_n}$, $n \geq 1$ sorozat periodikus (ha értelmezett)!

8. Bizonyítsd be, hogy az $x_0, x_1 \in (-k, k)$, $\quad x_{n+2} = \frac{k^2 \cdot \left(x_{n+1} - x_n\right)}{k^2 - x_n \cdot x_{n+1}}$, $\quad \forall n \geq 0$ rekurziót teljesítő sorozat periodikus!

9. Határozd meg az $x_n = x_{n-1}^3 - 3x_{n-1}$, $\quad \forall n \geq 1$, $x_0 \in [-2, 2]$ sorozat általános tagját!

10. Határozd meg az $x_0 = 1$, $\quad x_{n+1}\left(1 + \sqrt{1 + x_n^2}\right) = x_n$, $\quad \forall n \geq 0$ sorozat általános tagját. (Bencze Mihály)

11. Határozd meg az $x_0 = -1, \quad x_n = \dfrac{2x_{n-1} - 3}{3x_{n-1} - 4}, \quad \forall n \geq 1$ sorozat általános tagját!

12. Az $(x_n)_{n\in N}$ sorozat teljesíti az $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n - 3(-1)^n \quad \forall n \geq 1$ összefüggéseket. Bizonyítsd be, hogy $x_n = 2^n + (-1)^n, \quad \forall n \geq 1$! (érettségi,1998, Izrael)

13. Bizonyítsd be, hogy az $x_0 = 1, x_1 = 41 \quad x_{n+2} = 3x_n + \sqrt{8\left(x_n^2 + x_{n+1}^2\right)} \quad \forall n \geq 0$ összefüggésekkel értelmezett sorozat minden tagja természetes szám!

14. Egy *n* emeletes házat hány különböző módon színezhetünk ki fehérre és feketére, ha két feketére színezett emelet nem kerülhet egymás fölé, és minden emeletnek vagy fehérnek, vagy feketének kell lennie?

15. Vizsgáld meg az $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$ sorozat konvergenciáját! (előbb vizsgáljátok meg, mi lehet az első tag ahhoz, hogy a sorozat jól-értelmezett legyen)

16. Vizsgáld meg az $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), \quad x_0 \in \mathbb{R}$ sorozat konvergenciáját!

2.3. Másodrendű lineáris rekurziók

Értelmezés. *Másodrendű lineáris rekurziónak* nevezzük az $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ rekurziót, ahol $a, b \in \mathbb{C}$ (vagy $a, b \in \mathbb{R}$).

Vizsgáljunk meg egy sajátos esetet.

Feladat. Határozzuk meg az $x_{n+2} = 3 \cdot x_{n+1} - 2 \cdot x_n$, $x_1 = 3,\ x_2 = 5$ sorozat általános tagját.

Megoldás. A sorozat további tagjai $x_3 = 9,\ x_4 = 17,\ x_5 = 33,\ x_6 = 65$. Látható, hogy a sorozat minden tagja 1-gyel nagyobb mint egy kettőhatvány, pontosabban az $x_n = 2^n + 1$ összefüggés sejthető. Ez igazolható a matematikai indukció segítségével is, mi azonban megpróbálunk olyan módszert adni, amely lehetővé teszi az általános eset megoldását is. E célból átrendezzük az adott rekurziót a következő módon:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 2\left(x_{n+1} - x_n\right)$$

Így az $y_n = x_{n+1} - x_n$ jelöléssel az adott rekurzió $y_{n+1} = 2y_n$ alakban írható, tehát az $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozat egy mértani haladvány. Eszerint $y_n = y_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, tehát az $x_{n+1} - x_n = 2^n$ rekurzióból kellene meghatározni az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját. Ha felírjuk ezt a rekurziót rendre az $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ értékekre, majd tagonként összeadjuk a kapott egyenlőségeket, akkor az $x_n - x_1 = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$ egyenlőséghez jutunk. Ebből következik, hogy $x_n = 2^n + 1$. Ennek a gondolatmenetnek az előnye, hogy tetszőleges kezdőértékek esetén is használható (a megsejtés lehet, hogy más kezdőértékek esetén nem hozzáférhető). Tetszőleges x_1 és x_2 esetén $y_n = \left(x_2 - x_1\right)2^{n-1}$ és így

$$x_n - x_1 = \left(x_2 - x_1\right)\left(2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots + 2 + 1\right),$$

tehát $x_n = \left(2x_1 - x_2\right) + \left(x_2 - x_1\right)2^{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Vizsgáljuk meg, hogy $y_n = x_{n+1} - r_1 \cdot x_n$ alakú helyettesítéssel (akárcsak az előbb) milyen feltételek mellett tudjuk átalakítani az adott $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$ (*) rekurziót $y_{n+1} = r_2 \cdot y_n$ alakú rekurzióvá. Az $y_{n+1} = r_2 \cdot y_n$ rekurzió

$$x_{n+2} - r_1 \cdot x_{n+1} = r_2 \cdot \left(x_{n+1} - r_1 \cdot x_n\right)$$

alakba írható, ahonnan $x_{n+2}=\left(r_1+r_2\right)x_{n+1}-r_1r_2\cdot x_n$, tehát a megfelelő r_1 és r_2 megválasztása az $\begin{cases} r_1+r_2=a \\ r_1\cdot r_2=-b \end{cases}$ egyenletrendszer megoldására vezetődik vissza. Így az r_1 és r_2 az $r^2-a\cdot r-b=0$ egyenlet gyökei. Ezt az egyenletet a (*) rekurzió *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Mivel a karakterisztikus egyenletnek mindig van két megoldása (esetleg egybeesők vagy komplexek), az előbbi feladat megoldása a következőképpen általánosítható:

$$x_n-r_1x_{n-1}=\left(x_2-r_1x_1\right)\cdot r_2^{n-2},$$

tehát ha ezt a rekurziót rendre az $n,n-1,n-2,\ldots,2$ értékekre felírjuk, a k-adikat szorozzuk r_1^{k-1}-nel és tagonként összeadjuk a kapott egyenlőségeket, akkor az

$$x_n-r_1^{n-1}x_1=\left(x_2-r_1\cdot x_1\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2}r_1^k\cdot r_2^{n-2-k}\right)$$

összefüggéshez jutunk, mint ez az alábbiakból kitűnik.

$$\begin{aligned}
x_n-r_1x_{n-1}&=\left(x_2-r_1x_1\right)\cdot r_2^{n-2} \\
x_{n-1}-r_1x_{n-2}&=\left(x_2-r_1x_1\right)\cdot r_2^{n-3} &&\Big|\cdot r_1 \\
x_{n-2}-r_1x_{n-3}&=\left(x_2-r_1x_1\right)\cdot r_2^{n-4} &&\Big|\cdot r_1^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_2-r_1x_1&=\left(x_2-r_1x_1\right)\cdot r_2^{0} &&\Big|\cdot r_1^{n-2} \\
\hline
x_n-r_1^{n-1}x_1&=\left(x_2-r_1\cdot x_1\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2}r_1^k\cdot r_2^{n-2-k}\right)
\end{aligned}$$

Ha $r_1\neq r_2$, akkor az $r_1^{n-1}-r_2^{n-1}=\left(r_1-r_2\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2}r_1^{n-2-k}r_2^k\right)$ azonosság alapján

$$x_n=c_1\cdot r_1^{n-1}+c_2\cdot r_2^{n-1},\text{ ahol } c_1=\frac{x_2-r_2x_1}{r_1-r_2} \text{ és } c_2=\frac{x_2-r_1x_1}{r_2-r_1}.$$

Ha $r_1=r_2=r$, akkor $\sum_{k=0}^{n-2}r_1^{n-2-k}r_2^k=(n-1)r^{n-2}$, tehát $x_n=\left(k_1+k_2\cdot n\right)\cdot r^n$ alakú.

Ha a karakterisztikus egyenlet együtthatói valósak de a gyökei nem valós számok, akkor a sorozat általános tagjának alakja egyszerűsíthető hisz $r_{1,2}=\rho\left(\cos\varphi\pm i\cdot\sin\varphi\right)$, tehát $x_n=\rho^n\left(k_1\cdot\cos n\varphi+k_2\cdot\sin n\varphi\right)$. Az előbbi eseteket összefoglalva kijelenthetjük a következő tételt:

Tétel. 1. Ha az $r^2-a\cdot r-b=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $r_1\neq r_2\in\mathbb{R}$, akkor az $x_{n+2}=a\cdot x_{n+1}+b\cdot x_n$ rekurzió általános tagja $x_n=c_1\cdot x_1^n+c_2\cdot x_2^n$ alakú.

2. Ha az $r^2-a\cdot r-b=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $r_1=r_2$, akkor az $x_{n+2}=a\cdot x_{n+1}+b\cdot x_n$ rekurzió általános tagja $x_n=\left(k_1+k_2\cdot n\right)\cdot r^n$ alakú.

3. Ha az $r^2-a\cdot r-b=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $r_1=\overline{r_2}\notin\mathbb{R}$, akkor az $x_{n+2}=a\cdot x_{n+1}+b\cdot x_n$ rekurzió általános tagja $x_n=\left|r_1\right|^n\left(k_1\cdot\cos n\varphi+k_2\cdot\sin n\varphi\right)$ alakú, ahol φ az r_1 redukált argumentuma.

A konstansokat mindhárom esetben megadott tagokból határozzuk meg.

Eredmények, útmutatások

1. A sorozat első néhány tagját kiszámoljuk konkrétan és megpróbáljuk észrevenni a megfelelő képletet.

a) $x_n = \dfrac{1}{2n+3}$, $n \geq 0$; b) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$, $n \geq 0$;

c) $x_n = n+3$, $n \geq 0$ d) $x_n = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} = 2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$, $n \geq 0$

e) $x_n = \dfrac{n+2}{n}$, $n \geq 1$.

2. Másodrendű, állandó együtthatójú rekurziók. Ha nem tudják, akkor igazolni lehet az általános tag előállítására vonatkozó tételt.

3. Elégséges igazolni, hogy az $y_{n+1} = x_{n+1}^2 - a \cdot x_{n+1} \cdot x_n - b \cdot x_n^2$ sorozatra teljesül, hogy $y_{n+1} = -b \cdot y_n$.

4. Az $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ sorozatra lineáris a rekurzió.

5. Mindkét előjel esetén $x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_n x_{n+1} = 1$. A 3-as feladat alapján látható, hogy az $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$ sorozat tagjai teljesítik ezt az összefüggést, ha $u_2^2 + u_1^2 - 4u_2 u_1 = 1$. Terjesszük ki ezt a sorozatot negatív indexekre is az $u_n = 4u_{n+1} - u_{n+2}$ összefüggést használva ($n \leq 0$ esetén).

Másrészt az $x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_n x_{n+1} = 1$ összefüggés szimmetrikus x_n és x_{n+1} -re nézve, ezért $x_n = 2x_{n+1} \pm \sqrt{3x_{n+1}^2 + 1}$.

Ez azt jelenti, hogy ha tekintjük a rögzített x_1, x_2 -ből induló $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozatot ($u_1 = x_1$ és $u_2 = x_2$), akkor az $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tagjai az előjelek megválasztásától függetlenül az $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozat tagjai közül kerülnek ki (ebben a sorozatban előre lépünk, ha + előjelet választottunk és hátrafele ha – előjelet választottunk).

Emiatt elégséges igazolni, hogy végtelen sok olyan x_1 és x_2 egész szám van, amelyre $x_2^2 + x_1^2 - 4x_2 x_1 = 1$. Ez ekvivalens az $\left(x_2 - 2x_1\right)^2 - 3x_1^2 = 1$ (Pell típusú) egyenlettel és ennek végtelen sok megoldása előállítható az $a_m + b_m\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^m$, $a_m, b_m \in \mathbb{N}$ kifejtésből ($x_1 = b_m$ és $x_2 = a_m + 2b_m$).

6. $n = 0$ esetén $x_0 \in \{-1, 1\}$. Ez alapján a páros indexű tagok részsorozata konstans 1 vagy konstans -1. $n = 1$ -re $x_3 = 1$ és így $x_{2n+1} = 1$, ha $n \geq 1$. Az x_1 értéke tetszőleges lehet (csak nem -1).

7-8. Lehet konkrét értékekkel is próbálkozni az elején és aztán a rekurzió alapján kiszámolni $x_{n+2}, x_{n+4}, x_{n+8}$ -at az x_n függvényében.

9. Az $x_n = 2y_n$ sorozat esetén a rekurzió $y_n = 4y_{n-1}^3 - 3y_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, $y_0 \in [-1, 1]$ alakú, vagyis ha $y_0 = \cos\alpha$, akkor $y_n = \cos\left(3^n \alpha\right)$.

10. $x_1 = \tan\frac{\pi}{4}$. A rekurzió alapján, ha $x_n = \tan u_n$, akkor $x_{n+1} = \tan\frac{u_n}{2}$, tehát $x_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

11. $x_n = \frac{6n-1}{6n+1}$, $n \geq 0$. **12.** Matematikai indukcióval.

13. A gyököt kiküszöbölve, x_n szerint átrendezve és felírva a másodfokú megoldását az $x_0 = 1, x_1 = 41 \quad x_n = 3x_{n+2} - \sqrt{8\left(x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2\right)} \quad \forall n \geq 0$ összefüggéshez jutunk. Ez alapján $x_{n+3} = 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n$, tehát minden tagja egész szám (mert $x_2 = 119$ is az).

14. Ha x_n az n emelet lehetséges színezéseinek száma, akkor $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ és $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ mert ha az első szint fehér, akkor a többit x_n módon lehet kiszínezni és ha az első szint fekete, akkor a második fehér és a többit x_{n-1} módon lehet színezni.

15-16. A grafikus képen kellene ábrázolni a sorozat tagjait pókháló módszerrel (cobweb method) és onnan leolvasható a sorozat viselkedése.