BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Felvételi vizsga írásbeli próba – 2013. szeptember
Matematika tételsor

I. (30 pont) Tekintsük az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}$ mátrixot, ahol $x \in \mathbb{R}$.

1) (10 pont) Számítsuk ki az $A(x)$ mátrix determinánsát és oldjuk meg a $det(A(x)) = 81$ egyenletet.

2) (15 pont) Igazoljuk, hogy ha $G := \{A(x) \ : x \in \mathbb{R}\}$ és "$\cdot$" a mátrixok szorzása, akkor a $(G, \cdot)$ pár egy kommutatív csoportot alkot.

3) (5 pont) Határozzuk meg $A^n(2)$-t, $n \in \mathbb{N}^*$.

II. (30 pont) Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x-2}e^{|x|}$ összefüggéssel értelmezet $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt.

1) (10 pont) Határozzuk meg a függvény D maximális értelmezési tartományát, tanulmányozzuk a függvény deriválhatóságát és számítsuk ki a bal- és jobboldali deriváltakat azokban a pontokban, ahol a függvény nem deriválható.

2) (10 pont) Tanulmányozzuk az f függvény monotonitását és határozzuk meg a helyi szélsőértékpontokat.

3) (10 pont) Számítsuk ki a következő integrált

$$\int_{-1}^{1} x^2 (x-2) f(x) \, dx.$$

III. (30 pont) 1) Az xOy Descartes-féle koordináta-rendszerben adottak a következő pontok: $O(0,0)$, $A(3,4)$ şi $B(5,a)$, ahol $a \in \mathbb{R}$.

(a) (7 pont) Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a három pont kollineáris legyen.

(b) (7 pont) Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy az $M(7,2)$ pont az A pont B-re vonatkozó szimmetrikusa legyen.

(c) (8 pont) Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy az OAB háromszög egyenlő szárú legyen.

2) (8 pont) Oldjuk meg és tárgyaljuk az a valós paraméter értékei szerint a következő egyenletet

$$\sin x + a \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Megjegyzések

1) Minden tétel kötelező.
2) Minden feladat teljes megoldását kérjük (a vizsgalapon).
3) Indulásból jár 10 pont.
4) Az effektív munkaidő 3 óra.