BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

FELVÉTELI VIZSGA, 2019. július 21.
Írásbeli próba MATEMATIKÁBÓL

FONTOS MEGJEGYZÉS:

1) Az A. részben megjelenő feleletválasztós feladatok esetén egy vagy több helyes válasz lehet, melyeket a felvételizők a vizsgalap mellé kapott speciális nyomtatványra kell bejelöljenek. Ezeknek a feladatoknak a pontozása a felvételi szabályzatában megfogalmazott parciális pontozási rendszer szerint történik.

2) A B. részben megjelenő feladatok esetén a teljes megoldás leírása szükséges. Ezeket a feladatokat a javítók a megadott javítókulcsnak megfelelően pontozzák.

A. RÉSZ

1. (6 pont) Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}.$$

Ekkor az S_{2019} értéke

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{2019}{6059}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2018}{6059}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{2019}{6058}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2018}{6058}$.

2. (6 pont) Ha $\log_x(x^2+2x) + \log_{x^2}(x+2) = 4$, akkor az x lehet

$\boxed{\text{A}}$ 2; $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 4; $\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{2}$.

3. (6 pont) Adottak az $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x, y, z valós számok. Ha $AB = BA = O_2$ (a nullmátrix az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazból), akkor

$\boxed{\text{A}}$ nem létezik ilyen B; $\boxed{\text{B}}$ egyetlen ilyen B létezik; $\boxed{\text{C}}$ x, y, z páros számok; $\boxed{\text{D}}$ $\det B = 0$.

4. (6 pont) A $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ gyűrűben a $\hat{3}(x+\hat{2}) = \hat{9}$ egyenletnek

$\boxed{\text{A}}$ pontosan 4 megoldása van; $\boxed{\text{B}}$ minden megoldása invertálható $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$-ben;
$\boxed{\text{C}}$ pontosan 3 megoldása van; $\boxed{\text{D}}$ nincs megoldása.

5. (6 pont) Legyen $\ell = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x}$. Mely állítások igazak az alább felsoroltak közül?

$\boxed{\text{A}}$ Az ℓ racionális szám. $\boxed{\text{B}}$ Az ℓ határérték nem létezik. $\boxed{\text{C}}$ $\ell = 1/3$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell = \infty$.

6. (6 pont) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b + e^{-x}, & \text{ha } x \le 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

képlettel értelmeztük, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek. Legyen $x_0 = 0$. Mely állítások igazak az alább felsoroltak közül?

$\boxed{\text{A}}$ Végtelen sok olyan (a, b) számpár létezik, amelyre az f folytonos az x_0-ban.
$\boxed{\text{B}}$ f deriválható x_0-ban $\Leftrightarrow$ $(a = 1$ és $b = -2)$.
$\boxed{\text{C}}$ f folytonos x_0-ban $\Leftrightarrow$ $a + b = -1$.
$\boxed{\text{D}}$ f deriválható x_0-ban $\Leftrightarrow$ $(a = -2$ és $b = 1)$.

7. (6 pont) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$ képlettel értelmeztük. Ekkor

$\boxed{\text{A}}$ f csökkenő a $(-\infty, 0]$ intervallumon és növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon;
$\boxed{\text{B}}$ 0 inflexiós pontja f-nek;
$\boxed{\text{C}}$ f szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ halmazon;
$\boxed{\text{D}}$ f konvex az $\mathbb{R}$ halmazon.

8. (6 pont) Az $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ integrál értéke

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ π; $\boxed{\text{D}}$ 1.

9. (6 pont) Az $ABCD$ rombuszban $AB = 12$ és $m(\widehat{C}) = 60°$. Ekkor az $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ összeg értéke

$\boxed{\text{A}}$ 72; $\boxed{\text{B}}$ $72\sqrt{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $144\sqrt{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $72(1+\sqrt{3})$.

10. (6 pont) Az ABC háromszögben $BC = a$, $m(\widehat{A}) = 30°$ és $m(\widehat{B}) = 105°$. Ekkor az ABC háromszög területe

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{a^2(1+\sqrt{3})}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. RÉSZ

1. (10 pont) Számítsuk ki a következő határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k}}$.

2. (10 pont) Az xOy Descartes-féle koordináta-rendszerben adottak az $A(2,-1)$ és $B(4,3)$ pontok, valamint a $d\colon x - 2y - 1 = 0$ egyenes.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a d egyenes átmegy az $[AB]$ szakasz felezőpontján!

(b) Határozzuk meg azoknak a C pontoknak a koordinátáit, amelyekre az ABC háromszög területe egyenlő 3-mal, és az ABC háromszög egyik oldalfelezője a d egyenesen helyezkedik el!

3. (10 pont) Adott a

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \,\middle|\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

halmaz, ahol $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli.

(a) Bizonyítsuk be, hogy G részcsoportja az $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ csoportnak!

(b) Szerkesszünk egy injektív csoportmorfizmust a $(\mathbb{C}, +)$ és $(G, +)$ csoportok között!

MEGJEGYZÉS:
Minden feladat kötelező. Minden részvevőnek 10 pont jár hivatalból.
A munkaidő 3 óra.

Válaszok és megoldások

A. RÉSZ

Válaszok:

1. $\boxed{\text{C}}$; **2.** $\boxed{\text{A}}$; **3.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **4.** $\boxed{\text{C}}$; **5.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{C}}$;

6. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **7.** $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **8.** $\boxed{\text{D}}$; **9.** $\boxed{\text{A}}$; **10.** $\boxed{\text{B}}$.

Megoldások:

1. Minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén teljesül az $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$ összefüggés, ezért minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$3S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} = 1 - \frac{1}{3n+1}.$$

Innen következik, hogy $S_n = \frac{n}{3n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, vagyis $S_{2019} = \frac{2019}{6058}$.

2. Az egyenletben megjelenő logaritmusok létezési feltételeiből következik, hogy $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$. A logaritmus tulajdonságai alapján az előbbi halmazon az egyenlet ekvivalens az

$$\frac{1}{2}\log_x(x+2) + 1 + \log_x(x+2) = 4$$

egyenlettel, és innen előbb a $\log_x(x+2) = 2$, majd pedig az $x^2 = x + 2$ összefüggéshez jutunk. Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x = 2$.

3. Az $AB = BA = O_2$ mátrix-egyenletekből az

$$\begin{pmatrix} 4-2y & 4x-2z \\ -2+y & -2x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2x & -2+x \\ 4y-2z & -2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ekvivalens egyenleteket kapjuk. Megoldva ezeket az egyenleteket, következik, hogy $x = 2$, $y = 2$ és $z = 4$ az egyetlen megoldás, tehát egyedül $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ lehetséges.

4. A megadott egyenlet rendre ekvivalens a következőkkel: $\hat{3}(x + \hat{2}) = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x + \hat{6} = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x - \hat{3} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{3}(x - \hat{1}) = \hat{0}$. Az utóbbi egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x - \hat{1} \in \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$, tehát a megoldáshalmaz $M = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$. A kapott megoldások közül $\hat{9}$ nem invertálható a $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ gyűrűben.

5. A l'Hôpital-szabály alapján

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3\sin^2 x \cos^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3}.$$

6. Írhatjuk, hogy $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = a + b + 1 = f(0)$ és $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$. Innen következik, hogy f akkor és csak akkor folytonos $x_0 = 0$-ban, ha $a + b = -1$, tehát végtelen sok olyan (a, b) számpár létezik, amelyre f folytonos x_0-ban. Ugyanakkor f deriválható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, valamint

$$\begin{cases} f'(x) = ae^x - e^{-x}, & \text{ha } x < 0, \\ f'(x) = 2x, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Innen következik, hogy $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = a - 1$ és $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = 0$. Feltételezve, hogy $a + b = -1$ (vagyis, hogy f folytonos 0-ban), a Lagrange-féle középérték-tétel egyik következménye alapján $f'_b(0) =$

$a-1$ és $f_j'(0) = 0$. Ezért f akkor és csak akkor deriválható $x_0 = 0$-ban, ha $a+b=-1$ és $a-1=0$, vagyis ha $a=1$ és $b=-2$.

7. A feltételekből következik, hogy $f'(x) = (x^2-2x+2)e^x > 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, valamint $f''(x) = x^2e^x \geq 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

8. Elvégezve a $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ helyettesítést a határozott integrálban, írhatjuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t}\Big|_0^1 = 1.$$

9. Az $ABCD$ rombuszban $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$ és az átlók merőlegesek egymásra. Ha O jelöli az átlók metszéspontját, a skalárszorzat értelmezése alapján

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD \cdot AB \cdot \cos(\widehat{BAD}) + AC \cdot BD \cdot \cos(\widehat{AOD}) = 12 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 72.$$

10. Mivel $m(\widehat{C}) = 180^\circ - 30^\circ - 105^\circ = 45^\circ$, ezért az ABC háromszögben a szinusz-tételből következik, hogy

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow c = a\sqrt{2}.$$

Az ABC háromszög területe

$$\mathcal{T}(ABC) = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}\cdot\sin(60^\circ+45^\circ) = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2(1+\sqrt{3})}{4}.$$

B. RÉSZ

Megoldások és javítókulcsok:

1. (a) Legyen $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

(**3 pont**) Írhatjuk, hogy

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{\sqrt{1+(k/n)^2}} = \sigma(f,\Delta_n,\xi_n),$$

ahol az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ képlettel értelmeztük, Δ_n a $[0,1]$ intervallumnak a $\Delta_n = (0,\, 1/n,\, 2/n,\, \ldots,\, 1)$ felosztása, valamint $\xi_n = (1/n,\, 2/n,\, \ldots,\, 1) \in P(\Delta_n)$.

Megjegyzés. Azok a felvételizők, akik nem adták meg a függvényt, a felosztást és a közbeesőpont-rendszert, 2 pontot kapnak a fenti 3-ból.

(**1 pont**) Mivel $\|\Delta_n\| = 1/n \to 0$, ha $n \to \infty$, következik, hogy $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Megjegyzés. Ha nem jelenik meg a megoldás során, hogy $\|\Delta_n\| = 1/n \to 0$, ha $n \to \infty$, nem jár ez az 1 pont.

(**3 pont**) Az előbbiek alapján $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

(b) Legyen $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}}$. Írhatjuk, hogy

$$(\mathbf{1\ pont})\qquad b_n \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+1}},$$

és hasonlóan

$$(\mathbf{1\ pont})\qquad b_n \ge \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+n}}\,.$$

(**1 pont**) Mivel $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{2}$, a fogó tétele alapján $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 1/2$.

2. (a) (**1 pont**) Az $[AB]$ szakasz felezőpontja $M(3,1)$.
(**1 pont**) Az M pont koordinátái teljesítik a $d:\ 3-2-1=0$ egyenes egyenletét.

(b) (**2 pont**) Mivel a d egyenesen helyezkedik el az ABC háromszög egyik oldalfelezője, valamint az A és B pontok koordinátái nem teljesítik a d egyenletét (vagy mivel a d átmegy az $[AB]$ szakasz felezőpontján), következik, hogy minden megfelelő C pont a d egyenesen helyezkedik el.
(**2 pont**) Legyen $C(c_1,c_2)$. Innen következik, hogy $c_1 - 2c_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 2c_2 + 1$.
(**2 pont**) Az ABC háromszög területe $\frac{1}{2}|\Delta| = 3$, ahol

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2c_2+1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

(**1 pont**) Az előző összefüggésből $|-6c_2+6| = 6 \Leftrightarrow |-c_2+1| = 1$, vagyis $c_2 = 0$ vagy $c_2 = 2$.
(**1 pont**) Összefoglalva a kapott eredményeket, a C pont koordinátái $C(1,0)$ vagy $C(5,2)$.

3. (a) (1 pont) Mivel $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$, ezért $G \neq \emptyset$.

Legyen $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -\overline{z_4} & \overline{z_3} \end{pmatrix} \in G$. Írhatjuk, hogy

$$\textbf{(3 pont)} \quad A + B = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\overline{z_2} - \overline{z_4} & \overline{z_1} + \overline{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\overline{z_2 + z_4} & \overline{z_1 + z_3} \end{pmatrix} \in G,$$

$$\textbf{(3 pont)} \quad -A = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & -\overline{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ -\overline{(-z_2)} & \overline{-z_1} \end{pmatrix} \in G.$$

Az előbbiek alapján G részcsoportja az $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ csoportnak.

Megjegyzés. Más gondolatmenetet követve, G részcsoportja a $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ csoportnak $\Leftrightarrow$ [$G \neq \emptyset$, $A - B \in G$ minden $A, B \in G$ esetén] $\Leftrightarrow$ [G stabil része a $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ halmaznak és $(G, +)$ csoport].

(b) (1 pont) Legyen $f : \mathbb{C} \to G$, $f(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$ minden $z \in \mathbb{C}$ esetén. Észrevesszük, hogy $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} \in G$ minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, tehát f jólértelmezett.

(1 pont) f injektivitásának az ellenőrzése.

(1 pont) Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén

$$f(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1 + z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \overline{z_2} \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2),$$

ezért f csoportmorfizmus is.

Megjegyzés. Léteznek más injektív csoportmorfizmusok is a $(\mathbb{C}, +)$ és $(G, +)$ csoportok között, például:

$$f(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\overline{z} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad f(z) = \begin{pmatrix} z & z \\ -\overline{z} & \overline{z} \end{pmatrix}.$$