BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

FELVÉTELI VIZSGA, 2018. szeptember 12.
Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL

FONTOS TUDNIVALÓK:

1) A feleletválasztós feladatok („A" rész) esetén egy vagy több válasz lehet helyes. A helyes válaszokat a vizsgalapon kell feltüntetni. Egy feladathoz tartozó pontszámot csak akkor lehet megkapni, ha az összes helyes válasz fel van tüntetve, és csak a helyes válaszok vannak feltüntetve.

2) A „B" rész feladatai esetén a vizsgalapon kérjük a megoldások részletes kidolgozását. Ezeket a javítókulcs alapján értékeljük.

„A" rész

1. (5 pont) Az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2^{x^2}-4, & \text{ha } x<2\\ x-2, & \text{ha } x\geq 2\end{cases}$$

függvény grafikus képének az Ox tengellyel való metszete

$\boxed{\text{A}}$ üreshalmaz; $\boxed{\text{B}}$ egyelemű halmaz; $\boxed{\text{C}}$ kételemű halmaz; $\boxed{\text{D}}$ háromelemű halmaz; $\boxed{\text{E}}$ négyelemű halmaz.

2. (5 pont) Tekintjük az $(\mathbb{R},+,\cdot)$ struktúrát, ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza és a $+$, illetve $\cdot$ a szokásos összeadás, illetve szorzás. Az alábbi állítások közül melyek igazak:

$\boxed{\text{A}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ csoport; $\boxed{\text{B}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ gyűrű; $\boxed{\text{C}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ test; $\boxed{\text{D}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ olyan gyűrű, amelyik nem test; $\boxed{\text{E}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nem gyűrű.

3. (5 pont) A $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x\cdot \mathrm{tg}(2x)}$ határérték

$\boxed{\text{A}}$ $-\infty$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{E}}$ 0.

4. (5 pont) Az xOy Descartes-féle koordináta-rendszerben az OAB egyenlő oldalú háromszög oldalhosszúsága ℓ és az A csúcsa az $x-\sqrt{3}y=0$ egyenletű egyenesen helyezkedik el. Az alábbiak közül melyek lehetnek a B csúcs koordinátái:

$\boxed{\text{A}}$ $(0,\ell)$; $\boxed{\text{B}}$ $\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2},-\frac{\ell}{2}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $(0,-\ell)$; $\boxed{\text{D}}$ $\left(-\frac{\ell\sqrt{3}}{2},\frac{\ell}{2}\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $\left(-\frac{\ell\sqrt{3}}{2},-\frac{\ell}{2}\right)$.

5. (5 pont) Ha $\cos\beta$ a $\sin\alpha$ és a $\cos\alpha$ mértani középarányosa, ahol $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$, akkor $\cos 2\beta$ egyenlő:

$\boxed{\text{A}}$ $-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; $\boxed{\text{E}}$ $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

6. (5 pont) Tekintjük az $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^2+\frac{2}{x},\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

függvényt. Az alábbi állítások közül melyek igazak:

$\boxed{\text{A}}$ f-nek nincs ferde aszimptotája; $\boxed{\text{B}}$ f-nek egyetlen lokális minimumpontja van; $\boxed{\text{C}}$ az $f(x)=3$ egyenletnek $x=1$ megoldása; $\boxed{\text{D}}$ f monoton $\mathbb{R}^*$-on; $\boxed{\text{E}}$ f konvex $\mathbb{R}^*$-on.

„B" rész

1. a) (8 pont) Határozd meg az összes olyan számpárt, amelyben a két szám összege is és szorzata is -2.

b) (12 pont) Határozd meg az $A = \begin{pmatrix} a & a & a & 1 \\ a & a^2 & 4 & 1 \\ a & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix rangját! Tárgyald az a valós paraméter értéke szerint!

2. a) (8 pont) Az $ABCD$ konvex négyszögben jelölje P és Q az $[AC]$, illetve $[BD]$ átló felezőpontját.

1. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right)$.
2. Bizonyítsd be, hogy ha $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{PQ}$, akkor az $ABCD$ négyszög egy paralelogramma!

b) (7 pont) Bizonyítsd be, hogy:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$$

3. Jelöljön a és b két valós számot és tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

függvényt.

a) (10 pont) Határozd meg azokat az a, b számokat, amelyekre f deriválható és f' folytonos!

b) (8 pont) Határozd meg az f primitív függvényeit azokban az esetekben, amikor a primitívek léteznek!

c) (7 pont) Számítsd ki a $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ integrált, ha $a = 1$ és $b = -1$.

MEGJEGYZÉS:

Minden feladat kötelező. Hivatalból 10 pont jár.

Munkaidő 3 óra.

Válaszok és megoldások

„A” rész

1. $\boxed{D}$; **2.** $\boxed{B}$, $\boxed{C}$; **3.** $\boxed{B}$; **4.** $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$; **5.**$\boxed{A}$, $\boxed{B}$; **6.** $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$.

„B” rész

1. a) Az $a, b \in \mathbb{R}$ számok pontosan akkor teljesítik a feladatban kért tulajdonságot, ha

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ ab = -2 \end{cases} .$$

Ez a rendszer ekvivalens azzal, hogy a és b az $X^2 + 2X - 2$ másodfokú polinom gyökei. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva az előbbi polinom gyökei:

$$x_1 = -1 + \sqrt{3},\ x_2 = -1 - \sqrt{3}.$$

Tehát $(a, b) \in \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$, vagyis a keresett számpárok

$$(-1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}) \text{ és } (-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}).$$

Megjegyzés: Amennyiben a megoldás nem ekvivalenciák sorozataként van leírva, szükséges az eredmények ellenőrzése.

1. b) Mivel $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, $\operatorname{rang} A \geq 2$.

Ha az előbbi aldeterminánst az első oszloppal szegélyezzük, akkor a

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 4 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinánst kapjuk. Ennek az értéke 0 mivel két oszlopa arányos. Így tehát az A rangjának meghatározásához a

$$d = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a^2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns kiszámítása szükséges. Az utolsó sort kivonva az elsőből kiemelhető az $(a+2)$-es tényező, majd a megmaradt determinánsban az első sor kétszeresét hozzáadjuk a harmadikhoz:

$$d = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ a^2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a^2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a^2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(4 - a^2) = (2+a)^2(2-a).$$

Tehát d pontosan akkor 0, ha $a \in \{-2, 2\}$, vagyis
i) $a \in \{-2, 2\}$ esetén $\operatorname{rang} A = 2$,
ii) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ esetén $\operatorname{rang} A = 3$.

2. a) 1. Legyen O a sík egy tetszőleges pontja. Így

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}.$$

De OP az OAC háromszög O-ból induló oldalfelezője és OQ az OBD háromszög O-ból induló oldalfelezője, tehát

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$$

és

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Ez alapján

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)\right).$$

Másrészt

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC},$$

tehát

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right).$$

2. Az előbbi alpont alapján

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{PQ}.$$

A feltétel szerint

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{PQ},$$

tehát $2\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PQ}$, vagyis $\overrightarrow{PQ} = 0$. Így $P = Q$, vagyis az $ABCD$ konvex négyszög átlói felezik egymást, tehát a négyszög paralelogramma.

2. b) A bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát beszorozva a 0-tól különböző $\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ$ számmal, majd alkalmazva a $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, illetve a $\sin(x-y)$ kifejtésére vonatkozó képletet rendre a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ = 4\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ.$$

$$2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right) = 4\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ.$$

$$\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ = 2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ,$$

és végül

$$\sin 20^\circ = \sin 20^\circ.$$

Mivel ez igaz, és ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti egyenlőség is igaz.

3. a) Ahhoz, hogy f deriválható legyen $\mathbb{R}$-en, folytonosnak kell lennie. Az $x_0 \neq 0$ pontok egy eléggé kis környezetében f polinomiális függvény, tehát folytonos. $x_0 = 0$ esetén $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = b$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$, tehát f pontosan akkor folytonos, ha $b = -1$. A $(-\infty, 0)$ intervallumon $f(x) = x^2 + ax + b$, tehát $f'(x) = 2x + a$. A $(0, +\infty)$ intervallumon $f(x) = x - 1$, tehát $f'(x) = 1$. Mivel $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = a$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1$, $a \neq 1$ esetén az f nem deriválható az $x_0 = 0$ pontban (ha deriválható lenne, akkor f' Darboux-tulajdonságú lenne, vagyis nem lehetne elsőfajú szakadási pontja). $a = 1$ esetén a Lagrange-tétel következménye alapján f deriválható $x_0 = 0$-ban és $f'(0) = 1$, tehát ebben az esetben f deriválható $\mathbb{R}$-en és f' folytonos $\mathbb{R}$-en. Tehát f pontosan akkor deriválható, ha $a = 1$ és $b = -1$, és ebben az esetben f' folytonos.

b) Ahhoz, hogy f-nek legyen primitív függvénye Darboux-tulajdonságúnak kell lennie. A $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = b$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$, összefüggésekből következik, hogy f pontosan akkor Darboux-tulajdonságú, ha $b = -1$. Ugyanakkor $b = -1$ esetén az f függvény folytonos, tehát primitiválható. A Lagrange-tétel következményét alkalmazva a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon a f minden $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitívje

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} - x + c_1, & x < 0 \\ c_2, & x = 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + c_3, & x > 0 \end{cases}$$

alakú. De F deriválható, tehát folytonos is, vagyis

$$F(0) = c_2 = c_1 = c_3.$$

Vagyis a f primitívjeinek alakja

$$F(x) = c + \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} - x, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x, & x > 0 \end{cases}.$$

c) $b = -1$ esetén f folytonos, tehát integrálható is és primitiválható is és alkalmazható a Newton–Leibniz-tétel:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} - 1 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{5}{3}.$$

Megjegyzés: Az integrált a tartomány felbontásával is kiszámíthatjuk:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

JAVÍTÓKULCS

„A” rész

1. $\boxed{\text{D}}$ .... 5 p
2. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p
3. $\boxed{\text{B}}$ .... 5 p
4. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ .... 5 p
5. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ .... 5 p
6. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p

„B” rész

1. a) Az $a, b \in \mathbb{R}$ számok pontosan akkor teljesítik a feladatban kért tulajdonságot, ha
$\begin{cases} a+b=-2 \\ ab=-2 \end{cases}$ .... 2 p
Ez a rendszer ekvivalens azzal, hogy a és b az X^2+2X-2 másodfokú polinom gyökei. .... 2 p
A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva az előbbi polinom gyökei:
$x_1=-1+\sqrt{3},\ x_2=-1-\sqrt{3}$. .... 2 p
Tehát $(a,b) \in \{(x_1,x_2),(x_2,x_1)\}$, vagyis a keresett számpárok
$(-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3})$ és $(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$. .... 2 p
Megjegyzés: Amennyiben a megoldás nem ekvivalenciák sorozataként van leírva, szükséges az eredmények ellenőrzése.
1. b) Mivel $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, rang $A \geq 2$ .... 3 p
Ha az előbbi aldeterminánst az első oszloppal szegélyezzük, akkor a

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 4 & 1 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinánst kapjuk. Ennek az értéke 0 mivel két oszlopa arányos. .... 2 p
Így tehát az A rangjának meghatározásához a

$$d = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a^2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns kiszámítása szükséges. Az utolsó sort kivonva az elsőből kiemelhető az $(a+2)$-es tényező, majd a megmaradt determinánsban az első sor kétszeresét hozzáadjuk a harmadikhoz:

$$d = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & 0 \\ a^2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a^2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a^2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$=(a+2)(4-a^2)=(2+a)^2(2-a)$. .... 4 p
$d=0 \ \Leftrightarrow\ a \in \{-2,2\}$ .... 1 p
Ha $a \in \{-2,2\}$, akkor rang $A=2$. .... 1 p
Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$, akkor rang $A=3$. .... 1 p

2. a) 1. Legyen O a sík egy tetszőleges pontja.

(i) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. .... 1 p

(ii) OP és OQ az O-ból induló oldalfelezők az OAC, illetve az OBD háromszögekben .... 1 p

(iii) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$ és $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$. .... 1 p

(iv) $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)\right)$. .... 1 p

(v) $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$ .... 1 p

(vi) $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right)$. .... 1 p

2.

(i) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{PQ}$. .... 0,5 p

(ii) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{PQ} \Longrightarrow 2\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PQ} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = 0$ vagyis $P = Q$ és így az $ABCD$ négyszög paralelogramma. .... 1,5 p

2. b)

(i) $\sin 10° \cdot \cos 10° \neq 0$. .... 1 p

(ii) Rendre a következő ekvivalens alakokra hozhatjuk: $\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10° = 4\sin 10° \cdot \cos 10°$ 1 p

(iii) $2\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right) = 4\sin 10° \cdot \cos 10°$ .... 2 p

(iv) $\sin 30° \cos 10° - \cos 30° \sin 10° = 2\sin 10° \cdot \cos 10°$ .... 2 p

(v) végül $\sin 20° = \sin 20°$. .... 1 p

3. a) Ahhoz, hogy f-nek legyen primitív függvénye Darboux-tulajdonságúnak kell lennie. A $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = b$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$, összefüggésekből következik, hogy f pontosan akkor Darboux-tulajdonságú, ha $b = -1$. .... 4 p

Ahhoz, hogy f deriválható legyen $\mathbb{R}$-en, folytonosnak kell lennie. Az $x_0 \neq 0$ pontok egy eléggé kis környezetében f polinomiális függvény, tehát folytonos. $x_0 = 0$ esetén $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = b$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$, tehát f pontosan akkor folytonos, ha $b = -1$. A $(-\infty, 0)$ intervallumon $f(x) = x^2 + ax + b$, tehát $f'(x) = 2x + a$. A $(0, +\infty)$ intervallumon $f(x) = x - 1$, tehát $f'(x) = 1$. Mivel $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = a$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1$, $a \neq 1$ esetén az f nem deriválható az $x_0 = 0$ pontban (ha deriválható lenne, akkor f' Darboux-tulajdonságú lenne, vagyis nem lehetne elsőfajú szakadási pontja). .... 4 p

$a = 1$ esetén a Lagrange-tétel következménye alapján f deriválható $x_0 = 0$-ban és $f'(0) = 1$, tehát ebben az esetben f deriválható $\mathbb{R}$-en és f' folytonos $\mathbb{R}$-en. .... 1 p

Tehát f pontosan akkor deriválható, ha $a = 1$ és $b = -1$, és ebben az esetben f' folytonos. .. 1 p

b) Ahhoz, hogy f-nek legyen primitív függvénye Darboux-tulajdonságúnak kell lennie. A $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = b$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$, összefüggésekből következik, hogy f pontosan akkor Darboux-tulajdonságú, ha $b = -1$. Ugyanakkor $b = -1$ esetén az f függvény folytonos, tehát primitiválható. .... 2 p

A Lagrange-tétel következményét alkalmazva a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon a f minden $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitívje

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} - x + c_1, & x < 0 \\ c_2, & x = 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + c_3, & x > 0 \end{cases}$$

alakú. .... 4 p

De F deriválható, tehát folytonos is, vagyis $F(0) = c_2 = c_1 = c_3$. .... 1 p

Vagyis a f primitívjeinek alakja $F(x) = c + \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} - x, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x, & x > 0 \end{cases}$ . ... 1 p

c) $b = -1$ esetén f folytonos, tehát integrálható is és primitiválható is és alkalmazható a Newton–Leibniz-tétel. .... 2 p

$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} - 1 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{5}{3}$. .... 5 p

Megjegyzés: Az integrált a tartomány felbontásával is kiszámíthatjuk:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

Ebben az esetben 2-2 pont jár a felbontásra és a két rész kiszámolására, illetve még 1 pont a helyes végeredményre.

Megjegyzés. A „B" rész minden feladata esetén a javítókulcsban megadott megoldástól eltérő helyes megoldásokat szintén pontozzuk.