BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

FELVÉTELI VIZSGA, 2017. július 17.
Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL

I. TÉTEL (30 pont)

1) (10 pont) Igazoljuk, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\} \cap (-\infty, 0)$$

metszet üreshalmaz!

2) A $\mathbb{Q}$ halmazon tekintjük az

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

összefüggéssel értelmezett $*$ műveletet.

a) (15 pont) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ halmaz a $\mathbb{Q}$ zárt részhalmaza a $*$ műveletre nézve, és $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$ egy Abel-féle csoport!

b) (5 pont) Határozzuk meg az $a \in \mathbb{Q}$ értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q} \setminus \{2\}, \ f(x) = x + a$ függvény izomorfizmus legyen a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ és a $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$ csoportok közt!

II. TÉTEL (30 pont)

1) (10 pont) Határozzuk meg a

$$\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \cos 9x = 0$$

egyenletnek a $(0, 2)$ intervallumban levő megoldásait!

2) Az xOy derékszögű koordinátarendszerben tekintjük az $A(a, 0)$ és $B(0, b)$ pontokat. Az OAB háromszögben jelöljük H-val az O-ból az AB-re bocsájtott merőleges talppontját. Az OAB háromszögön kívül megszerkesztjük az $OACD$ és $OBEF$ négyzeteket.

a) (10 pont) Határozzuk meg az AE és a BC egyenesek egyenletét!

b) (10 pont) Bizonyítsuk be, hogy az AE, BC és OH egyenesek összefutók!

III. TÉTEL (30 pont)

Tekintjük az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2}{\ln 5} \ln(1 + x) + \sqrt{x}, \quad \forall x \geq 0$$

függvényt.

1) (10 pont) Határozzuk meg az f' függvényt és igazoljuk, hogy $4 \leq f(x) \leq x$, $\forall x \geq 4$.

2) (5 pont) Bizonyítsuk be, hogy az $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ és $x_0 \geq 4$ összefüggésekkel értelmezett sorozat konvergens, és számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ határértéket!

3) (10 pont) Számítsuk ki a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

határértéket!

4) (5 pont) Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^4 f'(t) f(t)\, dt.$$

MEGJEGYZÉS:

Minden tétel kötelező. Hivatalból 10 pont jár.

Munkaidő 3 óra.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs MATEMATIKÁBÓL
2017. július 17.

I. TÉTEL (30 pont)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\}$ egy másodfokú egyenlet valós megoldásainak halmaza. Az egyenlet diszkriminánsa $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2+1) = 8m$ .... 2 p
Ha $m < 0$, akkor $\Delta < 0$, tehát az egyenletnek nincs valós gyöke, tehát $A = \emptyset$. .... 2 p
Ha $m \geq 0$, akkor $\Delta \geq 0$, tehát az $(m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ egyenlet x_1, x_2 megoldásaira $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{m^2+1} > 0$, tehát a megoldások azonos előjelűek. .... 3 p
$m \geq 0 \;\Rightarrow\; m+1 > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{2(m+1)}{m^2+1} > 0$, tehát $x_1 + x_2 > 0$, tehát a megoldások pozitívak. ...... 2 p
Így $A = \emptyset$ ebben az esetben is. .... 1 p
2) a) A zártság igazolásához elégséges igazolni, hogy $x, y \in \mathbb{Q}$, $x * y = 2 \Leftrightarrow x = 2$ sau $y = 2$. $xy - 2x - 2y + 6 = 2 \Leftrightarrow 0 = xy - 2x - 2y + 4 = (x-2)(y-2) \Rightarrow x = 2$ vagy $y = 2$ .... 3 p
A művelet asszociativitásának igazolása: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ esetén $x * (y * z) = (x * y) * z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6)$ .... 3 p
$x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x = y * x$, $\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, tehát a művelet kommutatív. . 3 p
Az $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ összefüggésben $x = 0$ esetén következik hogy $e = 3$, tehát ha létezik semleges elem, akkor az $e = 3$. .... 2 p
Másrészt $x * 3 = 3x - 2x - 6 + 6 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, tehát $e = 3$ valóban a semleges elem. .... 1 p
Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, akkor $x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x-2)x' = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x-3}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2} \neq 2$, tehát $x' \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, vagyis minden elemnek létezik az inverze. .... 3 p
b) f bijektív $\Leftrightarrow$ ($x + a = 2$ pontosan akkor ha $x = 0$) $\Leftrightarrow$ $a = 2$ .... 3 p
Másrészt $\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ esetén $f(x) * f(y) = (x+2) * (y+2) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6 = xy + 2 = f(xy)$, tehát f izomorfizmus. .... 2 p

II. TÉTEL (30 pont)

1)

(i) Az adott egyenlet ekvivalnes a $\cos 12x - \cos 14x = 0$ egyenlettel. .... 3 p

(ii) $\sin 13x \cdot \sin x = 0$. .... 3 p

(iii) Az előbbi egyenlet általános megoldása $S = \underbrace{\left\{\frac{\pi}{13}k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}_{S_1} \bigcup \underbrace{\{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}}_{S_2}$ .... 1 p

(iv) $S_2 \cap (0, 2) = \emptyset$ .... 1 p

(v) $0 < \dfrac{\pi}{13}k < 2$, deci $0 < k < \dfrac{26}{\pi}$. .... 1 p

(vi) $x = \dfrac{\pi}{13}, \dfrac{2\pi}{13}, \dfrac{3\pi}{13}, \dfrac{4\pi}{13}, \dfrac{5\pi}{13}, \dfrac{6\pi}{13}, \dfrac{7\pi}{13}, \dfrac{8\pi}{13}$. .... 1 p

2)
Legyen P az AE és BC egyenesek metszéspontja.
a)

(i) $C(a, -a), E(-b, b)$ .... 2 p

(ii) Az AE egyenlete $bx + (a+b)y - ab = 0$ .... 4 p

(iii) A BC egyenlete $(a+b)x + ay - ab = 0$ .... 4 p

b)

(i) A P pont koordinátái $P\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2+ab}, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2+ab}\right)$ .... 3 p

(ii) Az AB iránytényezője $k_{AB} = -\dfrac{b}{a}$ .... 2 p

(iii) Az OH iránytényezője $k_{AB} = \dfrac{a}{b}$ .... 2 p

(iv) az OH egyenes egyenlete $y = \dfrac{a}{b}x$ .... 2 p

(v) a P pont rajta van az OH egyenesen .... 1 p

III. TÉTEL (30 pont)

1) $f'(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pe $(0, \infty)$ .... 2 p
$f(4) = 4$ .... 1 p
f növekvő, tehát $f(x) \geq f(4) = 4$, bármely $x \geq 4$ .... 2 p
$g : [4, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. .... 1 p
$g'(x) = f'(x) - 1$, és $g''(x) = f''(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \geq 4$. .... 2 p
$g'(4) = \frac{2}{5\ln 5} - \frac{3}{4} < 0$, tehát $g'(x) < 0$, $\forall x \geq 4$ .... 1 p
$g(4) = 0$, tehát $g(x) \leq 0$, $\forall x \geq 4$. .... 1 p
2) Az $x_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$ egyenlőtlenség igazolása matematikai indukcióval. .... 2 p
$x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$, tehát az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat csökkenő .... 1 p
$l \geq 4$ .... 1 p
$l = f(l) \Rightarrow l = 4$. .... 1 p
3) $f(0) = 0$, és f folytonos 0-ban, tehát 1^∞ alakú határozatlan eset. .... 1 p
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{\sqrt{x}}}$ .... 3 p
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \cdot 1 \cdot 0 = 1$ .... 4 p
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e$ .... 2 p
4) $f'(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2}(f^2)'(x)$ .... 2 p
$\int\limits_x^4 f'(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2}f^2(t)\Big|_x^4 = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(x)$. .... 2 p
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int\limits_x^4 f'(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2}f^2(4) - \frac{1}{2}f^2(0) = 8$ .... 1 p
Megjegyzés. Az előbbiektől eltérő helyes megoldásokat is pontozzuk.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MEGOLDÁSOK
FELVÉTELI VIZSGA, 2017. július 17.
Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL

I. TÉTEL (30 pont)

1) Az $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0\}$ halmaz egy másodfokú egyenlet valós megoldáinak halmaza. Az egyenlet diszkriminánsa $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2+1) = 8m$, tehát $m < 0$ esetén $\Delta < 0$ és így az egyenletnek nincs valós megoldása, tehát $A = \emptyset$ és így a metszet is üreshalmaz. Ha $m \geq 0$, akkor az $(m^2+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ egyenlet x_1, x_2 valós megoldásaira $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{m^2+1} > 0$, tehát a megoldások azonos előjelűek. Az $m \geq 0$ feltételből $m + 1 > 0$, tehát $x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+1)}{m^2+1} > 0$. Így mindkét gyök pozitív, tehát a metszet ebben az esetben is üreshalmaz.

2) a) A zártság igazolásához elégséges belátni, hogy $x, y \in \mathbb{Q}$, $x * y = 2 \Leftrightarrow x = 2$ sau $y = 2$. Az $x * y = 2$ egyenlőségből $xy - 2x - 2y + 6 = 2$, vagyis $0 = xy - 2x - 2y + 4 = (x-2)(y-2)$, azaz $x = 2$ vagy $y = 2$.

Bármely $x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ esetén $x * (y * z) = (x * y) * z = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$, tehát a művelet asszociatív.

Bármely $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ esetén $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = y = 2y = 2x + 6 = y * x$, tehát a művelet kommutatív. Az $x * e = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ összefüggésből $x = 0$ esetén következik, hogy $e = 3$, tehát a semleges elem csak $e = 3$ lehet. Másrészt $x * 3 = 3x - 2x - 6 + 6 = x, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, tehát $e = 3$ valóban semleges eleme a $*$ műveletnek. Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, akkor $x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x-2)x' = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x-3}{x-2} = 2 + \dfrac{1}{x-2} \neq 2$, tehát bármely $x \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ esetén $x' \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$. Így minden elem invertálható. Az előbbiek alapján a $(\mathbb{Q} \setminus \{2\}, *)$ struktúra egy Abel-csoport. b) f bijektív $\Leftrightarrow$ ($x + a = 2$ pontosan akkr ha $x = 0$) $\Leftrightarrow$ $a = 2$. Másr'eszt $a = 2$ esetén $f(x) * f(y) = (x+2) * (y+2) = (x+2)(y+2) - 2(x+2) - 2(y+2) + 6 = xy + 2 = f(xy)$, tehát f morfizmus. Így az f függvény $a = 2$ esetén izomorfizmus.

II. TÉTEL (30 pont)

1) A szorzatokat összegekké alakítjuk:

$$\frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 14x + \cos 4x)$$

vagyis

$$\cos 12x - \cos 14x = 0.$$

Ez ekvivalens a

$$\sin 13x \cdot \sin x = 0$$

egyenlettel, amelynek a megoldásai

$$x = \frac{\pi}{13}k,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

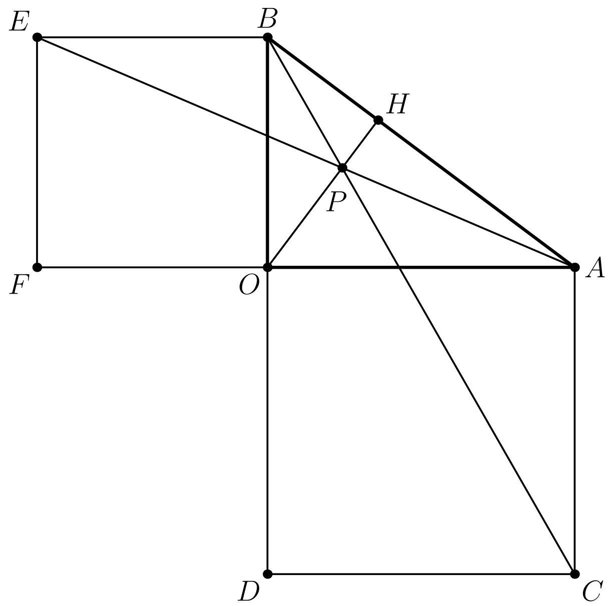
Ha egy szám $n\pi$ alakú ($n \in \mathbb{Z}$), akkor $x = \frac{\pi}{13}(13n)$, tehát $x = \frac{\pi}{13}k,\ k \in \mathbb{Z}$ alakú is. Így az egyenlet általános megoldása

$$x = \frac{\pi}{13}k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Az $x \in (0, 2)$ feltétel alapján

$$0 < \frac{\pi}{13}k < 2,$$

ahol
$$0 < k < \frac{26}{\pi}.$$
Mivel k egész szám, ezért csak a $k = 1, \ldots, 8$ értékek lehetségesek, tehát a megoldások:
$$x = \frac{\pi}{13}, \frac{2\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \frac{4\pi}{13}, \frac{5\pi}{13}, \frac{6\pi}{13}, \frac{7\pi}{13}, \frac{8\pi}{13}.$$
2) A négyzetek szerkesztése alapján a C és E pontok koordinátái $C(a, -a), E(-b, b)$. Az AE egyenes egyenlete
$$bx + (a+b)y - ab = 0,$$
és a BC egyenes egyenlete
$$(a+b)x + ay - ab = 0.$$
Ha P-vel jelöljük az AE és a BC metszéspontját, akkor a P pont koordinátái a
$$\begin{cases} bx + (a+b)y - ab = 0, \\ (a+b)x + ay - ab = 0, \end{cases}$$
rendszer megoldásai. Így
$$P = P\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2+ab}, \frac{a^2b}{a^2+b^2+ab}\right).$$



Másrészt az AB iránytényez oje $k_{AB} = -\dfrac{b}{a}$, tehát az OH iránytényezője $k_{OH} = \dfrac{a}{b}$, mivel OH merőleges AB-re. Így az OH egyenes egyenlete
$$y = \frac{a}{b}x.$$
A P pont koordinátáira teljesül az $y_P = \frac{a}{b}x_P$, tehát $P \in OH$. Így az AE, BC és OH egyenesek összefutók.

III. TÉTEL (30 pont)

1) Kiszámítjuk az f deriváltját:
$$f'(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ha $x > 0$, akkor $f'(x) > 0$, tehát az f függvény szigorúan növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon. Másrészt $f(4) = 4$, tehát mivel f szigorúan növekvő az $x > 4$ egyenlőtlenségből következik, hogy $f(x) > f(4) = 4$. Tehát $f(x) \geq 4$, $\forall x \geq 4$.

A második egyenlőtlenség igazolásának érdekében tekintjük a $g : [4, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ függvényt. $g'(x) = f'(x) - 1$, és $g''(x) = f''(x) = \frac{2}{\ln 5} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \geq 4$. Így g' szigorúan csökkenő. Ugyanakkor $g'(4) = \frac{2}{5 \ln 5} - \frac{3}{4} < 0$, mivel $\ln 5 > 1$, tehát $g'(x) < 0$, $\forall x \geq 4$ és így g is szigorúan csökkenő. Másrészt $g(4) = 0$, tehát $g(x) \leq 0$, $\forall x \geq 4$ és ekvivalens az $f(x) \leq x \, \forall x \geq 4$ egyenlőtlenséggel.

2) A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $x_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $n = 0$ esetén az egyenlőtlenség teljesül a feltételek miatt. Ha $x_k \geq 4$, akkor $x_{k+1} = f(x_k) \geq 4$ az 1) alpontban igazolt $f(x) \geq 4$, $\forall x \geq 4$ egyenlőtlenség alapján. Így a matematikai indukció elve alapján $x_n \in [0, \infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Az 1)-es alpontban igazolt második egyenlőtlenség alapján $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$, tehát az $(x_n)_{n \geq 0}$ sorozat csökkenő és alulról korlátos, tehát konvergens. Ha l az $(x_n)_{n \geq 0}$ sorozat határértéke, akkor az $x_n \geq 4, \forall n \geq 0$ egyenlőtlenségben határértékre térve kapjuk, hogy $l \geq 4$. Ha a rekurzióban határértékre térünk, akkor az $l = f(l)$ egynlethez jutunk, amiből az 1)-es alpont alapján következik, hogy $l = 4$.

3) $f(0) = 0$, és f folytonos 0-ban, tehát a kiszámítandó határérték 1^∞ alakú határozatlan eset, tehát a $\lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$ határértéket használhatjuk (ahol $y = f(x)$).

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left[(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \right]^{\frac{f(x)}{\sqrt{x}}},$$

tehát a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ határértéket kell kiszámítanunk.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + x)}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\ln 5} \cdot 1 \cdot 0 = 1,$$

tehát

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e.$$

4) $f'(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2}(f^2)'(x)$, tehát $\int\limits_x^4 f'(t) f(t)\, dt = \frac{1}{2} f^2(t) \Big|_x^4 = \frac{1}{2} f^2(4) - \frac{1}{2} f^2(x)$. Így a keresett határérték

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_x^4 f'(t) f(t)\, dt = \frac{1}{2} f^2(4) - \frac{1}{2} f^2(0) = 8.$$