BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

FELVÉTELI VIZSGA, 2016. július 22.
Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL

I. TÉTEL (30 pont)

1) (6 pont) Hány olyan háromjegyű természetes szám létezik, amelynek a számjegyei páronként különbözők?

2) Adott az $f = X^4 + \alpha X^2 + \alpha + \widehat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ polinom.

a) (8 pont) Határozd meg azokat az $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ paramétereket, amelyekre f-nek van gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban!

b) (8 pont) Igazold, hogy az f polinom reducibilis $\mathbb{Z}_3[X]$-ben bármely $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ esetén!

3) (8 pont) Bizonyítsd be, hogy a

$$P(n) : n^3 + 5n \text{ osztható } 6 - \text{tal.}$$

kijelentés igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!

II. TÉTEL (30 pont)

1) (15 pont) Adottak a

$$(d_1) : 3x - 4y + 6 = 0, \text{ illetve}$$
$$(d_2) : 4x - 3y - 9 = 0$$

egyenletű egyenesek. Jelöljük M-mel és N-nel az $y = -x + \lambda$ egyenletű egyenes metszéspontját a d_1, illetve d_2 egyenessel. Határozd meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ értékét ha $MN = 5\sqrt{2}$.

2) a) (8 pont) Igazold, hogy

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

b) (7 pont) Oldd meg az

$$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$$

egyenletet!

III. TÉTEL (30 pont)

Tekintjük az $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}, \quad \forall x \in D,$$

függvényt, ahol $D \subset \mathbb{R}$ az f maximális értelmezési tartománya.

1) (4 pont) Határozd meg a D halmazt!

2) (4 pont) Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x \in D$!

3) (4 pont) Határozd meg az f függvény aszimptotáit!

4) (8 pont) Állítsd össze az f függvény változási táblázatát és határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

5) (4 pont) Határozd meg az A és B konstansok értékét úgy, hogy minden $x \in D$ esetén teljesüljön az

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

összefüggés!

6) (6 pont) Bizonyítsd be, hogy $\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} f(x)dx = -3 \ln 2$.

MEGJEGYZÉS:

Minden tétel kötelező. Hivatalból 10 pont jár.

Munkaidő 3 óra.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs MATEMATIKÁBÓL
2016. július 22.

I. TÉTEL (30 pont)

1) *1. Megoldás*
A százasok jegyét $10-1=9$ választhatjuk .... 1 pont
Ha ez megvan, akkor a tízesek jegyét $10-1=9$ módon rögzíthetjük .... 2 pont
Az utolsó számjegy $10-2=8$ féle lehet .... 2 pont
Tehát a vizsgált számok száma $9\cdot 9\cdot 8=648$ .... 1 pont
2. Megoldás
A három különböző számjegyből álló számok és a nem 0-val kezdődő rendezett részhalmazok (variációk) közt bijekció létesíthető. .... 1 pont
A 10 elemű halmaz harmad osztályú variációinak száma $A_{10}^3=10\cdot 9\cdot 8$ .... 1 pont
A 0-val kezdődő, 3 elemű rendezett részhalmazok és a kételemű rendezett részhalmazok közt bijekció létesíthető. .... 1 pont
Ezeknek a száma $A_9^2=9\cdot 8$ .... 1 pont
Tehát a különböző számjegyeket tartalmazó háromjegyű számok száma
$V_{10}^3-V_9^2=10\cdot 9\cdot 8-9\cdot 8=(10-1)\cdot 9\cdot 8=648$ .... 2 pont

2) a) f-nek pontosan akkor van gyöke $\mathbb{Z}_3=\{\widehat{0},\widehat{1},\widehat{2}\}$-ban, ha
$f(\widehat{0})=\widehat{0}$ vagy $f(\widehat{1})=\widehat{0}$ vagy $f(\widehat{2})=\widehat{0}$ .... 2 pont
$f(\widehat{0})=\widehat{0}\Leftrightarrow \alpha+\widehat{2}=\widehat{0}\Leftrightarrow \alpha=-\widehat{2}=\widehat{1}$ .... 1 pont
$f(\widehat{1})=\widehat{1}+\alpha+\alpha+\widehat{2}=\widehat{2}\alpha$ .... 1 pont
$f(\widehat{2})=\widehat{16}+\widehat{4}\alpha+\alpha+\widehat{2}=\widehat{1}+\alpha+\alpha+\widehat{2}=\widehat{2}\alpha$ .... 1 pont
Tehát $f(\widehat{1})=\widehat{0}\Leftrightarrow f(\widehat{2})=\widehat{0}\Leftrightarrow \widehat{2}\alpha=\widehat{0}\Leftrightarrow \alpha=\widehat{0}$ .... 2 pont
A válasz: $\alpha\in\{\widehat{0},\widehat{1}\}$ .... 1 pont

b) $\alpha=\widehat{0}\Rightarrow f=X^4+\widehat{2}\Rightarrow f(\widehat{1})=\widehat{0}\Rightarrow f$-nek van gyöke, tehát reducibilis $\mathbb{Z}_3[X]$-ben .... 3 pont
$\alpha=\widehat{1}\Rightarrow f=X^4+X^2\Rightarrow f(\widehat{0})=\widehat{0}\Rightarrow f$-nek van gyöke, tehát reducibilis $\mathbb{Z}_3[X]$-ben .... 3 pont
$\alpha=\widehat{2}\Rightarrow f=X^4+\widehat{2}X^2+\widehat{1}=(X^2+\widehat{1})^2$, tehát f reducibilis .... 2 pont

3) *1. Megoldás.* Matematikai indukcióval
Ellenőrzés .... 1 pont
Indukciós lépés:
A $P(n+1)$ kijelentés felírása .... 2 pont

A $P(n+1)$ kijelentés bizonyítása .... 5 pont

2. Megoldás. $n^3+5n=n^3-n+6n$ .... 2 pont
$n^3-n+6n=(n-1)n(n+1)+6n$ .... 2 pont
2 és 3 osztja az $(n-1)n(n+1)$ .... 3 pont
Végső következtetés .... 1 pont

II. TÉTEL (30 pont)

1.

(i) az első egyenessel való metszéspont koordinátái: $M\left(\dfrac{4\lambda-6}{7},\dfrac{3\lambda+6}{7}\right)$ .... 3 pont

(ii) a második egyenessel való metszéspont koordinátái: $N\left(\dfrac{3\lambda+9}{7},\dfrac{4\lambda-9}{7}\right)$ .... 3 pont

(iii) $MN=\dfrac{\sqrt{2}}{7}|\lambda-15|$ .... 3 pont

(iv) $\frac{\sqrt{2}}{7}|\lambda - 15| = 5\sqrt{2}$ .... 3 pont

(v) $\lambda_1 = 50$ .... 3 pont

(vi) $\lambda_2 = -20$ .... 3 pont

2. a) *1. Megoldás.* Matematikai analízis segítségével.
$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. .... 2 pont
$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, $\forall x \in (-1,1)$ .... 2 pont
$f(x) = c$ a $(-1,1)$ intervallumon .... 1 pont
$c = \frac{\pi}{2}$ .... 2 pont
az $x = 1$ és $x = -1$ eset vizsgálata .... 1 pont

2. Megoldás. Trigonometriai eszközök segítségével
Ha $\alpha = \arccos x$, akkor $\cos\alpha = x$ és $\alpha \in [0,\pi]$ .... 2 pont
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = x$ .... 2 pont
$\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .... 2 pont
$\frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x$ .... 2 pont

b) Az a) alpontban igazolt azonosság megfelelő oldalait hozzáadjuk a megoldandó egyenlet két oldalához .... 3 pont
az $\arccos x = \frac{\pi}{3}$ egyenlet levezetése .... 2 pont
a megoldás $x = \frac{1}{2}$ .... 2 pont

III. TÉTEL (30 pont)

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ (vagy $D = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$) .... 4 pont

2. $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 - 3x + 2) - x \cdot (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \dfrac{2 - x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$ .... 4 pont

3. $y = 0$ vízszintes aszimptota a $\pm\infty$ felel .... 2 pont
$x = 1$ függőleges aszimptota .... 1 pont
$x = 2$ függőleges aszimptota .... 1 pont

4. A változási táblázat elkészítése .... 6 pont

f csökkenő az $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, 2)$, illetve $(2,\infty)$ intervallumokon .... 1 pont
f növekvő a $[-\sqrt{2}, 1)$, $(1, \sqrt{2}]$ intervallumokon .... 1 pont

5. $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{(A+B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2}$ .... 1 pont
$-2A = B$ és $A + B = 1$ .... 1 pont
$A = -1$ és $B = 2$ .... 2 pont

6. $I = \int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} f(x)dx = \int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(\dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2}\right) dx = -\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \dfrac{1}{x-1}dx + 2\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \dfrac{1}{x-2}dx$ .... 2 pont
$I = -\ln(x-1)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} + 2\ln(2-x)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}$ .... 2 pont
$I = -\ln\frac{2}{3} + \ln\frac{1}{3} + 2\ln\frac{1}{3} - 2\ln\frac{2}{3} = 3\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{2}{3}\right) = 3\ln\frac{1}{2} = -3\ln 2.$ .... 2 pont

Megjegyzés. Az előbbiektől eltérő helyes megoldásokat is pontozzuk.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MEGOLDÁSOK

FELVÉTELI VIZSGA, 2016. július 22.

Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL

I. TÉTEL (30 pont)

1) *1. Megoldás.*
Összesen 10 számjegyünk van: $0, 1, \ldots, 9$. Az első számjegy nem lehet 0, ezért a százasok számjegyét $10 - 1 = 9$ módon választhatjuk meg. Miután ezt lerögzítettük a tízesek számjegyét a $10 - 1 = 9$ megmaradt lehetséges érték közül választhatjuk és az utolsó számjegy kiválasztására $10 - 2 = 8$ lehetőségünk van, tehát összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ olyan háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek páronként különböznek.

2. Megoldás.
Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a háromjegyű számok halmaza és a számjegyekből alkotott azon háromelemű rendezett részhalmazok (variációk) között, amelyekben az első elem nem 0. A 10 elemű halmaz 3-ad osztályú variációinak száma $V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$. Ugyanakkor a 0-val kezdődő harmad osztályú variációk kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők azoknak a rendezett pároknak, amelyekben az elemek nem egyformák. Ezek valójában a 10 elemű halmaz másod osztályú variációi, amelyeknek a száma $V_9^2 = 9 \cdot 8$. Így a keresett számok száma $V_{10}^3 - V_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = (10-1) \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

2) *1. Megoldás.* a) f-nek pontosan akkor van gyöke $\mathbb{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$-ban ha $f(\widehat{0}) = \widehat{0}$ vagy $f(\widehat{1}) = \widehat{0}$ vagy $f(\widehat{2}) = \widehat{0}$.

$$f(\widehat{0}) = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha + \widehat{2} = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha = -\widehat{2} = \widehat{1}$$

$$f(\widehat{1}) = \widehat{1} + \alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{2}\alpha$$

$$f(\widehat{2}) = \widehat{16} + \widehat{4}\alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{1} + \alpha + \alpha + \widehat{2} = \widehat{2}\alpha$$

Tehát $f(\widehat{1}) = \widehat{0} \Leftrightarrow f(\widehat{2}) = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{2}\alpha = \widehat{0} \Leftrightarrow \alpha = \widehat{0}$, vagyis f-nek pontosan akkor van gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban, ha $\alpha \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$.

b) Ha $\alpha \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$, akkor f-nek van gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban, tehát reducibilis. $\alpha = \widehat{2}$ esetén $f = X^4 + \widehat{2}X^2 + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$, tehát f ebben az esetben is reducibilis. Így nem létezik olyan α, amelyre f irreducibilis lenne.

2. Megoldás (a két alpont összevonva):
$\alpha \in \mathbb{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$. $\alpha = \widehat{0} \Rightarrow f = X^4 + \widehat{2} \Rightarrow f(\widehat{1}) = \widehat{0} \Rightarrow f$-nek van gyöke, tehát reducibilis $\mathbb{Z}_3[X]$-ben.

$\alpha = \widehat{1} \Rightarrow f = X^4 + X^2 \Rightarrow f(\widehat{0}) = \widehat{0} \Rightarrow f$-nek van gyöke, tehát reducibilis $\mathbb{Z}_3[X]$-ben.

$\alpha = \widehat{2} \Rightarrow f = X^4 + \widehat{2}X^2 + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$, tehát f ebben az esetben is reducibilis. Ráadásul $f(\widehat{0}) = f(\widehat{1}) = f(\widehat{2}) = \widehat{1}$, tehát f-nek nincs gyöke. Így az első alpont esetén a válasz $\alpha \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$.

3) *1. Megoldás.* $n = 0$ esetén $6|0$, tehát az állítás igaz. Ha $n \in \mathbb{N}$ rögzített és feltételezzük, hogy $6|n^3 + 5n$, akkor az

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$$

azonosság alapján elégséges belátni, hogy $(n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$ osztható 6-tal. $2|n(n+1)$, mert két egymást követő természetes szám közül az egyik páros. Így $6|3n(n+1)$. A feltevés alapján $6|n^3 + 5n$, és mivel $6|6$, írhatjuk, hogy $6|(n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$, vagyis $6|(n+1)^3 + 5(n+1)$. A matematikai indukció elve alapján $6|n^3 + 5n$, bármely $n \in \mathbb{N}$.

2. Megoldás. $n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n$. $(n-1)n(n+1)$ osztható 6-tal, mert 3 egymást követő természetes szám közül az egyik osztható 3-mal és legalább az egyik 2-vel, valamint a 2 és a 3 relatív prím, tehát ha a szorzat osztható 2-vel is és 3-mal is, akkor osztható 6-tal is. $6n$ osztható 6-tal, tehát $(n-1)n(n+1) + 6n = n^3 + 5n$ is osztható 6-tal.

II. TÉTEL (30 pont)

1. Az $y = -x + \lambda$ egyenesnek a feladatban megadott első egyenessel való metszéspontjának koordinátái a

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ y = -x + \lambda \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai, azaz $M\left(\dfrac{4\lambda - 6}{7}, \dfrac{3\lambda + 6}{7}\right)$. A második egyenessel való metszéspont koordinátái a

$$\begin{cases} 4x - 3y - 9 = 0 \\ y = -x + \lambda \end{cases}$$

rendszer megoldásai, tehát $N\left(\dfrac{3\lambda + 9}{7}, \dfrac{4\lambda - 9}{7}\right)$. Az M és N pontok távolsága az

$$\overrightarrow{MN}\left(\frac{-\lambda + 15}{7}, \frac{\lambda - 15}{7}\right) = \frac{\lambda - 15}{7}(-1, 1)$$

vektor hossza. Így a két pont távolsága:

$$MN = \frac{\sqrt{2}}{7}|\lambda - 15|,$$

tehát a

$$\frac{\sqrt{2}}{7}|\lambda - 15| = 5\sqrt{2}$$

egyenletet kell megoldanunk. Ez ekvivalens a

$$|\lambda - 15| = 35$$

egyenlettel, amelynek a megoldásai $\lambda_1 = 50$ és $\lambda_2 = -20$. □

2. a) *1. Megoldás.* Tekintjük az $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ függvényt. f deriválható $(-1, 1)$-en és

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

tehát a függvény állandó a $(-1, 1)$ intervallumon. Mivel $f(0) = \frac{\pi}{2}$, következik, hogy $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in (-1, 1)$. Ha $x = 1$, akkor $f(1) = \arccos 1 + \arcsin 1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Ha $x = -1$, akkor $f(-1) = \arccos(-1) + \arcsin(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, tehát $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$.

2. Megoldás. Ha $\alpha = \arccos x$, akkor $\cos\alpha = x$ és $\alpha \in [0, \pi]$. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = x$. Mivel $\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ az előbbi egyenlőség mindkét oldalának az arcsin-át számolva kapjuk, hogy $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin x$.

b) Ha az a) alpontban igazolt egyenlőség megfelelő oldalaihoz hozzáadjuk a megoldandó egyenlet két oldalát, akkor az $\arccos x = \frac{\pi}{3}$ egyenlethez jutunk. Ebből következik, hogy $x = \frac{1}{2}$.

□

III. TÉTEL (30 pont)

Megoldás. 1. Ahhoz, hogy az f függvény helyesen legyen értelmezve, minden $x \in D$ esetén léteznie kell az $f(x)$ kifejezésnek és a kifejezés értéke egy valós szám kell legyen. Az $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$ tört minden olyan valós x esetén létezik, amelyre $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Az $x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ ($\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1$ és $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$), tehát $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ (vagy $D = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$).

2. Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, akkor $f'(x)$ kiszámításához a törtfüggvény deriválási szabályát alkalmazzuk. Így írhatjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 3x + 2) - x \cdot (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = 0$, mivel a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

tehát $x = 1$ és $x = 2$ függőleges aszimptota és $y = 0$ vízszintes aszimptota $\pm\infty$ felé.

4. A változási táblázat a következő:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		2		∞
$2 - x^2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x^2 - 3x + 2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3 + 2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	$-3 + 2\sqrt{2}$	$\searrow$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4 + 3\sqrt{2})}{-2} = -\frac{1}{2}(6 + 4\sqrt{2}) = -(3 + 2\sqrt{2}) = -(1 + \sqrt{2})^2,$$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = -3 + 2\sqrt{2}.$$

A táblázat alapján látható, hogy az f függvény csökkenő a $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, 2)$, illetve $(2, \infty)$ intervallumokon és növekvő a $[-\sqrt{2}, 1)$, $(1, \sqrt{2}]$ intervallumokon.

5. Közös nevezőre hozzuk a jobb oldalt:

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{x^2 - 3x + 2},$$

tehát $x = (A+B)x - 2A - B, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$. $x = 0$ esetén az $-2A = B$ összefüggéshez és $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$ esetén az $A + B = 1$ egyenlőséghez jutunk. Az így kapott két egyenlőségből alkotott egyenletrendszer megoldása $A = -1$ és $B = 2$, tehát

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}, \forall x \in D.$$

Megjegyzés. Az érvelés, vagy a számolás menete lehet más is. Például, ha $(x-1)$-gyel, illetve $(x-2)$-vel szorozzuk az adott egyenlőséget majd a kapott összefüggésekben határértékre térünk $x \to 1$, illetve $x \to 2$, akkor ugyanehhez az eredményhez jutunk, de az is előfordulhat, hogy észrevesszük, hogy $x = 2(x-1) - (x-2)$, stb.

6. Az előbbi alpont eredményét használjuk. Mivel $\left\{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\} \subset (1,2)$, írhatjuk, hogy

$$\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} f(x)dx = \int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right) dx = -\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x-1}dx + 2\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \; -\ln(x-1)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} + \; 2\ln(2-x)\Big|_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} = -\ln\frac{2}{3} + \ln\frac{1}{3} + 2\ln\frac{1}{3} - 2\ln\frac{2}{3} = 3\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{2}{3}\right) =$$

$$= 3\ln\frac{1}{2} = -3\ln 2.$$

□