BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Felvételi vizsga (alapképzés) – 2015. július
Matematika írásbeli próba

I. TÉTEL (30 pont)

1. Adottak az $f = (X-1)^n - X^n + 1$, $g = X^2 - 3X + 2$ és $h = X^2 - X$, $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$ polinomok, ahol $n \geq 3$. Határozzuk meg f-nek g-vel való osztási maradékát. Ha n páratlan igazoljuk, hogy f osztható h-val.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 1 \\ -3x + y + 2z &= a \end{cases}$$

egyenletrendszert. Tárgyalás az $a \in \mathbb{R}$ paraméter értékei szerint.

3. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & b \\ a & 7 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy teljesüljön a $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A$ feltétel.

II. TÉTEL (30 pont)

Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1}$ függvény.

1. Készítsük el az f függvény grafikus ábráját, tanulmányozva a függvény monotonitását, konvexitását, valamint az aszimptoták létezését és a grafikonnak a tengelyekkel való metszéspontjait.

2. Igazoljuk, hogy $f(1) = 1$ és $f(x) > x$ bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén.

3. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = f(x_n), \ n \geq 1. \end{cases}$$

összefüggésekkel értelmezett $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan monoton és határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ határértéket.

III. TÉTEL (30 pont)

1. Egy derékszögű vonatkoztatási rendszerben adottak az $A(2a, a)$ és $B(2b, b)$ pontok, ahol $a \neq b$ valós paraméterek. Határozzuk meg az $M(x, y)$ pontot, ha $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$.

2. Oldjuk meg a $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$ egyenletet.

3. Adott az ABC háromszög. Ha tudjuk, hogy $\sin A = \dfrac{1}{2}$, határozzuk meg a másik két szög mértékének összegét.

Megjegyzés: Minden tétel kötelező. A részletes megoldásokat a vizsgalapra kell írni (a piszkozatokat nem veszik figyelembe). 10 pont jár hivatalból. Az effektív munkaidő 3 óra.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul de admitere (nivel licenţă) - sesiunea iulie 2015
BAREM pentru proba scrisă la MATEMATICĂ

OFICIU .... **10 puncte**

SUBIECTUL I .... **30 puncte**

1. Restul împărţirii lui f la g .... 6 puncte

Divizibilitatea lui f cu h .... 6 puncte

2. Determinantul sistemului .... 3 puncte

Cazul de incompatibilitate .... 3 puncte

Cazul de compatibilitate şi determinarea soluţiilor .... 4 puncte

3. rang$A$ .... 2 puncte

det$B$ .... 2 puncte

Explicitarea condiţiei rang$B =$ rang$A$ şi determinarea valorilor a şi b .... 4 puncte

SUBIECTUL II .... **30 puncte**

1. Monotonia şi convexitatea .... 4 puncte

Studiul existenţei asimptotelor şi a punctelor de intersecţie cu axele .... 6 puncte

Trasarea graficului .... 2 puncte

2. $f(1) = 1$ .... 2 puncte

$f(x) > x$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .... 8 puncte

3. Strict monotonia şirului .... 4 puncte

Determinarea limitei şirului .... 4 puncte

SUBIECTUL III .... **30 puncte**

1. Explicitarea condiţiei $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ .... 7 puncte

Determinarea punctului $M(x, y)$ .... 3 puncte

2. Reducerea la ecuaţii trigonometrice de bază .... 7 puncte

Soluţiile ecuaţiei .... 3 puncte

3. Determinarea valorilor lui A .... 6 puncte

Suma măsurilor celorlalte două unghiuri .... 4 puncte

NOTĂ: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.