UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul de admitere (nivel licenţă) - sesiunea iulie 2014
Proba scrisă la Matematică

I. Feladat (30 pont)

a) Oldjuk meg a $2\ln^2 x + 1 < 3\ln x,\ x \in (0, \infty)$ egyenlőtlenséget.

b) Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix. Számítsuk ki: A^{-1}, A^2 és A^{2015}. Határozzuk meg az A^{2015} mátrix inverzét.

c) Állapítsátok meg, hogy az $f = X^2 + \hat{2}$, $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, polinomnak vannak-e gyökei $\mathbb{Z}_5$-ben.

II. Feladat (30 pont)

Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{ha} \quad x < 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{ha} \quad x \geq 1 \end{cases}$ függvény.

a) Tanulmányozzuk a függvény folytonosságát és deriválhatóságát.

b) Bizonyítsuk be, hogy az f függvénynek létezik primitív függvénye és határozzuk meg egy primitívjét.

c) Bizonyítsuk be, hogy az f függvény integrálható a $[0, 2]$ intervallumon és számítsuk ki az $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrált.

III. Feladat (30 pont)

Adottak az $O(0, 0)$, $A(2, 1)$ és $B(0, 3)$ pontok.

a) Határozzuk meg az $[AB]$ szakasz felezőpontjának a koordinátáit.

b) Határozzuk meg a C pont koordinátáit úgy, hogy az $OACB$ négyszög paralelogramma legyen.

c) Számítsuk ki az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektorok hosszát. Határozzuk meg a $\widehat{AOB}$ szög koszinuszát.

Megjegyzés: Az összes feladat kötelező. A megoldásokat részletesen írjuk le (a piszkozatokat nem vesszük figyelembe). 10 pont jár hivatalból. A munkaidő három óra.