1. Folyonosság és deriválhatóság. Függvények ábrázolása, alkalmazások

1.1. Folytonosság és deriválhatóság

1. Tanulmányozzuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x\neq 0\\ a, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény folytonosságát az $a\in\mathbb{R}$ paraméter függvényében.

2. Legyenek a és b valós számok és $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+ax)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x\neq 0\\ b, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

összefüggéssel értelmezett függvény. Tanulmányozzuk az f függvény folytonosságát és deriválhatóságát.

3. Milyen $a\in\mathbb{R}$ értékre lesz folytonos az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x\neq 0\\ a, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény?

4. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x)=\begin{cases}|x|^p\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x\neq 0\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

összefüggéssel értelmezzük, ha ahol p valós szám. Igazoljuk, hogy:

(a) $p>0$ esetén f folytonos az $\mathbb{R}$-en;

(b) $p\leq 0$ esetén f nem folytonos az origóban.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 1995.*)[1]

1.2. Monotonitás és konvexitás

5. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$. Tanulmányozzuk az f függvény monotonitását és konvexitását.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 1992*)[2]

6. Bizonyítsuk be, hogy $x\geq\ln(1+x)$, bármely $x\geq 0$ esetén.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 1991*)[3]

7. Tekintsük az $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$, ahol $D\subseteq\mathbb{R}$ az f függvény maximális értelmezési tartománya.

(a) Határozzuk meg a D halmazt.

(b) Tanulmányozzuk az f függvény deriválhatóságát; számítsuk ki az f' és f'' deriváltakat. Határozzuk meg a függvény szélsőértékpontjait és az inflexiós pontokat, ha léteznek.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2001.*)[4]

[1] Felvételi vizsga, 1995. szeptember, [ASz] 42. oldal, II. tétel, 2. feladat.
[2] Felvételi vizsga, 1992. július, [ASz] 51. oldal, II. tétel, 3. feladat.
[3] Felvételi vizsga, 1991. július, [ASz] 53. oldal, II. tétel, 1.(a) feladat.
[4] Felvételi vizsga, 2001. július, [ASz] 31. oldal, II. tétel.

1.3. Asszimptóták

8. Határozzuk meg a következő függvények aszimptotáit:

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x^2+1}+\operatorname{arctg}(x)$;

(b) $f:\mathbb{R}\setminus(-1,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^6+x^5+x^2+x}}{x^2}$;

(c) $f:\mathbb{R}\setminus[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$;

(d) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}}$.

1.4. Szélsőértékpontok

9. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{ha } x<-1\\ x^2-1, & \text{ha } |x|\le 1\\ |1-\ln x|, & \text{ha } x>1\end{cases}$$

függvény szélsőértékpontjait.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1995*)[5]

10. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$ függvényt.

(a) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben f deriválható.

(b) Határozzuk meg az f szélsőérték pontjait.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2002*)[6]

1.5. Függvényábrázolás

11. Ábrázoljuk grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2+\sin x}$ függvényt.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1993.*)[7]

12. Ábrázoljuk grafikusan az $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ függvényt a D maximális értelmezési tartományon.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1990.*)[8]

13. Ábrázoljuk grafikusan az $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,\frac{1}{2}\}f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^2$ függvényt, felhasználva a másodrendű deriváltat is.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1999.*)[9]

2. Kapcsolódó vizsga- és versenyfeladat-részletek az utóbbi évekből

14. Legyen $a>0$. Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^x} & x\le a\\ \sqrt{x} & x>a\end{cases}$$

függvényt.

[5]Felvételi vizsga, 1995. szeptember, [ASz], 43. oldal, II. tétel, 3. feladat.
[6]Felvételi vizsga, 2002. július, [ASz], 29. oldal, II. tétel, 1. feladat.
[7]Felvételi vizsgafeladat, 1993. szeptember, [ASz], 48. oldal, II. tétel, 3. feladat.
[8]Felvételi vizsgafeladat, 1990. július, [ASz], 56. oldal, II. tétel, 3. feladat.
[9]Felvételi vizsga, 1999. szeptember, [ASz] 33. oldal, II. tétel, 1. feladat.

(a) Határozd meg az a azon értékeit, amelyekre f folytonos $\mathbb{R}$-en!

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2018.*)[10]

15. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

függvényt.

(a) Határozd meg az f szélsőértékpontjait!

(*Versenyfeladat-részlet, 2018.*)[11]

16. Tekintjük az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2}{\ln 5} \ln(1 + x) + \sqrt{x}, \qquad \forall x \geq 0$$

függvényt.

(a) Határozzuk meg az f' függvényt és igazoljuk, hogy $4 \leq f(x) \leq x$, $\forall x \geq 4$.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2017.*)[12]

17. Tekintjük az $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

függvényt, ahol $D \subset \mathbb{R}$ az f függvény maximális értelmezési tartománya.

(a) Határozd meg a D halmazt!

(b) Számítsd ki az f' függvényt!

(c) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

(d) Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{\sqrt{2016}}{2015} > \frac{\sqrt{2017}}{2016}.$$

(*Versenyfeladat-részlet, 2017.*)[13]

18. Tekintjük az $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}, \quad \forall x \in D,$$

függvényt, ahol $D \subset \mathbb{R}$ az f maximális értelmezési tartománya.

(a) Határozd meg a D halmazt.

(b) Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x \in D$.

(c) Határozd meg az f függvény aszimptótáit.

(d) Állítsd össze az f függvény változási táblázatát és határozzuk meg az f függvény monotonitási intervallumait.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2016.*)[14]

19. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^n e^{-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvényt, ahol $n \in \mathbb{N}$ egy rögzített szám és $n \geq 2$.

(a) Határozzuk meg az f függvény vízszintes aszimptótáját a $+\infty$ felé.

[10] Felvételi vizsga, 2018. július, "B" rész, 3. feladat

[11] BBTE Matek-Infó verseny, 2018. március, "B" rész, 3. feladat

[12] Felvételi vizsga, 2017. július, III. tétel, 1. feladat.

[13] BBTE Matek-Infó verseny, 2017. április, III. tétel, 1. feladat.

[14] Felvételi vizsga, 2016 július, III. tétel, 1. feladat.

(b) Határozzuk meg az f' és az f'' függvényeket.

(c) Bizonyítsuk be, hogy $f(x) \leq f(n)$, $\forall x \geq 0$.

(d) Határozzuk meg az f függvény inflexiós pontjait.

(*Tartalék vizsgafeladat-részlet, 2016.*)[15]

20. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x| \cdot \sqrt[3]{1 - x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvényt.

(a) Határozd meg az f maximális deriválhatósági tartományát és számítsuk ki az f' függvényt.

(b) Bizonyítsd be, hogy

$$f(x) \leq \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{6}}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Számítsd ki az f'' függvényt és határozzuk meg az f inflexiós pontjait.

(*Versenyfeladat-részlet, 2016.*)[16]

21. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(x^2 + 1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvényt.

(a) Határozzuk meg az f' és f'' függvényeket.

(b) Tanulmányozzuk az f függvény monotonitását és konvexitását.

(c) Bizonyítsuk be az $f(x) \leq \min\{x, x^2\}$, $\forall x \geq 0$ egyenlőtlenséget.

(*Versenyfeladat-részlet, 2016.*)[17]

Hivatkozások

[ASz] András Szilárd, Szenkovits Ferenc, *Matematikai feladatgyűjtemény.* Státus Kiadó, Csíkszereda, 2017.

[web] A BBTE *„Matematika és informatika mintatételek a BBTE Matek-Infó versenyre és a felvételi vizsgára”* weboldala, (link).

[15] Felvételi vizsga, 2016. július, tartalék tételsor, [ASz] 5. oldal, III. tétel.

[16] BBTE Matek-Infó verseny, 2016. április, III. tétel.

[17] BBTE Matek-Infó verseny, 2016. április, I. tartalék tételsor, [ASz] 8. oldal, III. tétel.