Lineáris algebra feladatok 2019

2019 január 12

1. Számítsuk ki a következő determinánsokat:

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix};\quad b)\ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix};\quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

2. a) Számítsuk ki az $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ determinánsát, ha $a_{ij} = 0,\ i > j$.
b) Számítsuk ki az $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ determinánsát, ha $a_{ij} = 0,\ i + j \leq n$.

3. Számítsuk ki a következő determinánsokat:

$$\text{a) } A_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ x & a & x & \dots & x \\ x & x & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a \end{vmatrix} \qquad \text{b) } D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } B_n = \begin{vmatrix} x & y & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & y & \dots & y & y \\ z & z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & z & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix} \qquad \text{d) } V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } S_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (S_n\text{-nél } n \text{ páratlan}).$$

4. Számítsuk ki az $A \in M_n(\mathbb{R})$ inverzét, ahol $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$.

5. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ mátrix rangját.

6. Határozzuk meg az $A = (x_i y_j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix rangját.

7. Tárgyaljuk és oldjuk meg a következő egyenletrendszereket $\mathbb{R}$ felett:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 & = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 & = \gamma \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax_1 + (a+1)x_2 + (a+2)x_3 & = a+3 \\ bx_1 + (b+1)x_2 + (b+2)x_3 & = b+3 \\ x_1 + cx_2 + c^2 x_3 & = c^3 \end{cases}.$$

8. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket $\mathbb{R}$ felett:

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 & = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 & = 3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 & = -2 \end{cases}.$