Felvételi felkészítő feladatok

I. Vektorok

1. Legyenek E és F az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalainak a felezőpontjai. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$!

2. Adott egy $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ szabályos hatszög. Igazoljuk, hogy

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_4} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 3\overrightarrow{C_1C_4}!$$

3. Egy ABC háromszögben megszerkesztjük az AD szögfelezőt. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektort az $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ vektorok valamint az ABC háromszög $|BC| = a$,$|AC| = b$, $|AB| = c$ oldalainak függvényében.

4. Legyen O, A, B, C, D öt pont a térben. Mutassuk ki, hogy $ABCD$ akkor és csakis akkor paralelogramma, ha $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

5. Egy O középpontú körben az AB és CD egymásra merőleges húrok az M pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.

6. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög és G az ABC háromszög súlypontja. Tekintve egy tetszőleges O pontot a térben mutassuk ki, hogy

   a) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$;

   b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

7. Az ABC háromszög síkjában adottak a D és E pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Igazoljuk, hogy az A, D és E pontok egy egyenesen helyezkednek el!

8. Legyen ABC egy egységnyi oldalú háromszög. Ekkor

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

   $\boxed{A}$ $\dfrac{3}{2}$; $\boxed{B}$ $-\dfrac{3}{2}$; $\boxed{C}$ $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{D}$ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, E legyen a (BC) oldal felezőpontja és M egy tetszőleges pont a háromszög síkjában. Ekkor az $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ összeg egyenlő

   $\boxed{A}$ $3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BE}$;

   $\boxed{B}$ $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AE}$;

   $\boxed{C}$ $3\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}$;

   $\boxed{D}$ $3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AE}$.

10. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög. Felvesszük az $M \in AB$, $N \in (AC)$ és $P \in BC$ pontokat úgy hogy $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$, $\dfrac{AN}{NC} = 2$ és $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC}$. Ekkor

   A a C felezőpontja a $[BP]$ szakasznak;

   B $\overrightarrow{NP} = \dfrac{1}{3}(-\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC})$;

   C $\overrightarrow{NP} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC})$;

   D az M, N, P pontok kollineárisak.

11. Az ABC háromszögben $m(\hat{B}) = 120°$, legyen $D \in (AC)$ és $E \in (BD)$ úgy, hogy $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{2}$ és $\dfrac{DE}{EB} = 1$. Ekkor $\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{EA} =$

   A $2\overrightarrow{BE}$; B $3\overrightarrow{BE}$; C $2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$; D $2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA}$.

12. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalán és AC átlóján felvesszük az M illetve N pontokat úgy hogy $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{x}\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{y}\overrightarrow{AC}$. Ekkor a D, M és N pontok kollineárisak, ha

   A $x = y - 1$; B $x = 1 - y$; C $y = x - 1$; D $x = y - 2$.

13. Ha $\vec{a} = (-1, -5)$, $\vec{b} = (2, -3)$, akkor a $3\vec{a} - \vec{b}$ vektor hosszúsága

   A $\sqrt{349}$; B $7\sqrt{6}$; C 13; D $3\sqrt{26} - \sqrt{13}$.

II. Trigonometria

1. Ha egy háromszög szögeire teljesül, hogy $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}$, akkor a háromszög lehet

   A egyenlő szárú és derékszögű;

   B egyenlő szárú vagy derékszögű;

   C egyenlő szárú és tompaszögű;

   D nem egyenlő szárú és hegyesszögű.

2. Az ABC háromszögben $BC = a$, $m(\widehat{A}) = 30°$, $m(\widehat{B}) = 105°$. Ekkor az ABC háromszög területe

   A $\dfrac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}$; B $\dfrac{a^2(1+\sqrt{3})}{4}$; C $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4}$; D $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. Az ABC háromszögben $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $B = \dfrac{\pi}{4}$. Ekkor

$\boxed{\text{A}}$ egyetlen háromszög van ezekkel az adatokkal;

$\boxed{\text{B}}$ a háromszög területe $2(1+\sqrt{3})$;

$\boxed{\text{C}}$ $m(\hat{A}) = \dfrac{\pi}{6}$;

$\boxed{\text{D}}$ egyetlen háromszög sem létezik ezekkel az adatokkal.

4. Az ABC háromszögben $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{17}$, $B = \arccos \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$. Ekkor

$\boxed{\text{A}}$ egyetlen háromszög van ezekkel az adatokkal;

$\boxed{\text{B}}$ két háromszög is létezik ezekkel az adatokkal;

$\boxed{\text{C}}$ $a = 4$;

$\boxed{\text{D}}$ $\sin B = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

5. A

$$\sqrt{\sin^2 x - 4\sin x + 4} + \sqrt{\sin^2 x + 4\sin x + 4} = \sqrt{\sin^2 x - 7\sin x + \frac{49}{4}}$$

egyenlet megoldáshalmaza:

$\boxed{\text{A}}$ $x \in \left\{(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{B}}$ $x \in \emptyset$;

$\boxed{\text{C}}$ $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{D}}$ $x \in \left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Oldjuk meg a $(0, 4\pi)$ intervallumon az alábbi egyenleteket:

a) $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$;

b) $\sin x = \sin 5x$;

c) $\cos 2x = -\cos 5x$;

7. Határozzuk meg az alábbi egyenletek megoldáshalmazait:

a) $2\cos 2x = 8\cos x - 1$;

b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$;

c) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

d) $\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x = \dfrac{3}{2}$;

e) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.