SOROZATOK ÉS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

DR. LUKÁCS ANDOR

1. Sorozatok határértéke

1.1. Műveleti ötletekkel kiszámolható határértékek (konjugálás, teleszkópikus összegek, Cesaro–Stolz-tétel, Cauchy–d'Alembert-tétel).

Tétel (Cesaro–Stolz)**.** *Ha a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan növekvő, korlátlan és létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ határérték is és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Tétel. *(Cauchy–d'Alembert) Ha $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ és létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ határérték is és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1. Számítsd ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n^2-n})$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right)$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, ha $p \in \mathbb{N}$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1}\ln 2+\frac{n-1}{2}\ln 3+\cdots+\frac{1}{n}\ln(n+1)}{n\ln 2+(n-1)\ln 3+\cdots+1\cdot\ln(n+1)}$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$;

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$.

2. Igazold, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = x$. Igaz-e az állítás fordítottja?

3. Igazold, hogy ha $x_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = x.$$

Igaz-e az állítás fordítottja?

1.2. Majorálási kritériummal és fogó-tétellel kiszámolható határértékek.

Tétel (Majorálási kritérium)**.** *Ha a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ és létezik $\ell \in \mathbb{R}$ úgy, hogy*

$$|a_n - \ell| \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Tétel (Fogó-tétel)**.** *Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatoknak létezik határértéke és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell,$$

valamint

$$a_n \le x_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak is létezik határértéke és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

4. Számítsd ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$;
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$;
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a>0$;
(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$;
(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$;
(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;
(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}}$.

1.3. Konvergencia vizsgálata a monotonitás és korlátosság segítségével. Egyéb konvergenciával kapcsolatos feladatok.

5. Igazold, hogy a $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

6. Igazold, hogy a $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

7. Bizonyítsd be, hogy az
$$x_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
képlettel értelmezett sorozat konvergens és a határértéke $\frac{1}{2}$ és 1 között van!

8. Igazold, hogy az
$$x_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$
képlettel értelmezett sorozat konvergens és a határértéke $\frac{1}{2}$ és 1 között van!

9. Igazold, hogy az
$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$
képlettel értelmezett sorozat konvergens és határértéke 0 és 1 között van!

10. Igazold, hogy az $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ képlettel értelmezett sorozat konvergens és határértéke e. Igazold azt is, hogy e irracionális!

11. Igazold, hogy az $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ képlettel értelmezett sorozat konvergens, majd számítsd ki a határértékét!

1.4. Rekurzívan értelmezett sorozatok konvergenciájával kapcsolatos feladatok.

12. Tanulmányozd a következő rekurzívan értelmezett sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, számítsd ki a határértéküket is!

(a) $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, $a_0\in[-2,\infty)$;
(b) $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$, $a_0=0$;
(c) $a_n = 1+\frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0=1$;
(d) $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}}\right)$, $a_0, a>0$.

13. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1<y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$ és $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ képlettel az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(y_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határétékeik megegyeznek!

14. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1<y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$ és $y_{n+1}=\frac{2x_n y_n}{x_n+y_n}$ képlettel az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(y_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határétékeik megegyeznek!

2. Függvények határértéke

2.1. Függvényhatárértékek létezése, bal- és jobboldali határértékek.

15. Igazold, hogy nem léteznek a következő függvény-határértékek:

(a) $\lim_{x\to\infty} \sin x$;
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$;
(c) $\lim_{x\to\infty} (1-\cos x)e^x$;
(d) $\lim_{x\to 1} e^{\frac{x}{x-1}}$.
(e) $\lim_{x\to\infty} (1+\sin x)\ln x$.

16. Számítsd ki a következő függvények jobb- és baloldali határértékeit a 0-ban:

(a) $f(x) = \dfrac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;
(b) $f(x) = x\cdot\dfrac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;
(c) $f(x) = \dfrac{\cos\frac{1}{x^2}}{x}$.

2.2. Alaphatárértékek és azok segítségével kiszámolható határértékek. A l'Hospital-szabály alkalmazhatósága.

17. Igazold az alábbi alap függvény-határértékeket (elfogadhatod, hogy $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$):

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$;
(b) $\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \frac{1}{x_0}$;
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$;
(d) $\lim_{x\to x_0} \frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0} = a^{x_0}\ln a$;
(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;
(f) $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} = \cos x_0$;
(g) $\lim_{x\to x_0} \frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0} = -\sin x_0$;
(h) $\lim_{x\to x_0} \frac{x^r-x_0^r}{x-x_0} = rx_0^{r-1}$.

Miért nem alkalmazható egyik fenti határérték számolásakor sem a l'Hospital szabály? Mit "jelentenek" ezek a határértékek?

18. Számítsd ki a következő függvényhatárértékeket!

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;
(d) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
(e) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;
(f) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$;
(h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{x^2}$;
(i) $\lim_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a}$, ahol $a>0$;
(j) $\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a}$, ahol $a>0$;
(k) $\lim_{x\to a} \frac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}$, ahol $a>0$;
(l) $\lim_{x\to a} \frac{a^{x^a}-a^{a^a}}{x-a}$, ahol $a>0$;
(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x+\sin^3 2x+\cdots+\sin^3 nx}{x^3}$;
(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$;
(o) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;
(p) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2^{\operatorname{ctg} x}-2}{x-\frac{\pi}{4}}$;
(q) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$;
(r) $\lim_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}}$.

19. Határozd meg az $a,b,c,p\in\mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy teljesüljön a

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}-(ax^p+bx+c)\right) = \frac{7}{3}$$

egyenlőség!