

Felvételi előkészítő

A matematikai indukció módszere, egyenletek, egyenlőtlenségek

- 1)** Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.
- 2)** Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 6$, $n \in \mathbb{N}$, akkor egy tetszőleges négyzet feldarabolható n darab négyzetre.
- 3)** Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor az $(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n)$ szorzatban a 2 kitevője pontosan n .
- 4)** Bizonyítsd be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén 2^n -nek létezik olyan egész számú többszöröse, amely csak az 1 és 2 számjegyekből áll.
- 5)** Határozd meg a következő irracionális egyenletek valós megoldásait:
a) $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x+6} + \sqrt[6]{4-x^2} = x$; **b)** $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[4]{x-4} = 5$.
- 6)** Oldd meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazában:
- $$\begin{cases} x^2 - yz = 1 \\ y^2 - xz = 2 \\ z^2 - xy = -1 \end{cases}$$
- 7)** Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx - 4 = 0 \cup x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2m = 0$ halmaznak pontosan két eleme legyen.
- 8)** Oldd meg a következő egyenleteket:
a) $2^{x+1} \cdot 3^{x-1} = 5$; **b)** $8^x + 6^x = 12^x + 9^x$; **c)** $x^2 \cdot \log_3 x = 9$
d) $2^{2^x} = 2x + 2$; **e)** $2^x = x^2$, ha $x \geq 0$.
- 9)** Határozd meg az $\log_{x^2} x + 2 < 1$ egyenlőtlenség valós megoldásait!
- 10)** Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékeit úgy, hogy a $z^3 + 3 + i z^2 - 3z - m + i = 0$ egyenletnek legyen legalább egy valós gyöke!
- 11)** Határozd meg a z komplex számot az alábbi egyenlőségekből!
a) $\bar{z}^2 + 2z + 1 = 0$; **b)** $z^2 + \bar{z} = 5 + 3i$; **c)** $|z-1| + 2z = 13 + 8i$;
d) $z^3 = 2 + 11i$.
- 12)** Az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékei szerint tárgyald az $2x^3 + 3x^2 - 12x = m$ egyenlet valós megoldásainak a számát!