

Felvételi felkészítő

2019. március 9.

Kolozsvár

Kombinatorika

- 1. Feladat.** Hány olyan négyjegyű természetes szám létezik, amelynek a számjegyei páronként különböznek egymástól?
- 2. Feladat.** Hány olyan négyjegyű páros természetes szám létezik, amelynek a számjegyei páronként különböznek egymástól?
- 3. Feladat.** Adott az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ halmaz. Hány olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek összege páros?
- 4. Feladat.** Adott a $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ halmaz. Hány olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek összege páros?
- 5. Feladat.** Hány olyan hétjegyű természetes szám van, amelyben minden számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke?
- 6. Feladat.** Hány olyan hétjegyű páros természetes szám van, amelyben minden számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke?
- 7. Feladat.** Hányféleképpen olvasható ki az ábrából az **BBTEMATINFO** szó, ha a kiolvasás során valamelyik B betűből indulva csak jobbra vagy lefelé léphetünk?

		B	B								
		B	T	E							
B	B	T	E	M	A	T	I	N	F	O	
B	T	E	M	A	T	I	N	F	O		
		M	A	T	I	N	F	O			
		A	T	I							
		T	I	N							
		I	N	F							
		N	F	O							
		O	O								

- 8. Feladat.** Egy tíztagú társaság tagjainak összesen 23 darab egyforma bankjegyet adunk. Hányféleképpen lehet ez?
- 9. Feladat.** Számítsd ki az $S_n = \sum_{k=0}^n 2^k C_n^k$ összeget!
- 10. Feladat.** Határozd meg, hogy rögzített n elemű H halmaz esetén hány (A, B) rendezett halmazpárra teljesül az $A \cup B = H$ egyenlőség!

Algebrai struktúrák

- 1. Feladat.** Az $I = [8, 10]$ halmazon értelmezzük a $*$: $I \times I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x * y = xy - 9x - 9y + 90$$

leképezést. Bizonyítsd be, hogy I zárt része \mathbb{R} -nek a $*$ műveletre nézve és határozd meg az I maximális részhalmazait, amelyek csoportot alkotnak az adott művelettel!

2. Feladat. Bizonyítsd be, hogy a $G = (5, \infty)$ intervallumon értelmezett

$$x * y = xy - 5x - 5y + 30, \quad \forall x, y \in G$$

művelet egy $(\mathbb{R}, +)$ -szal izomorf struktúrát határoz meg G -n! Számítsd ki az

$$x^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_n$$

elemet, ha $x \in G$ és $n \in \mathbb{N}^*$!

3. Feladat. Tekintjük a $G = (5, \infty)$ halmazt és az

$$x * y = xy - ax - ay + b, \quad \forall x, y \in G$$

műveletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Az a, b paraméterek milyen értékére zárt a $*$ műveletre nézve a G halmaz? Milyen a, b értékekre asszociatív a $*$ művelet? Milyen a, b értékekre csoport a $(G, *)$ struktúra?

4. Feladat. Bizonyítsd be, hogy a $(\mathbb{Z}, +)$ csoport nem izomorf a $(\mathbb{Q}, +)$ csoporttal!

5. Feladat. Bizonyítsd be, hogy a $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ halmaz a mátrixok összeadásával és szorzásával kommutatív gyűrűt alkot, amely izomorf a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ -vel. Döntsük el, hogy a $(K, +, \cdot)$ struktúra test-e vagy sem!