BBTE
Magyar
Matematika és
Informatika Intézet

Felvételi előkészítő

A matematikai indukció módszere, egyenletek, egyenlőtlenségek

1) Bizonyítsd be, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{n^2}<2$.

2) Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 6$, $n \in \mathbb{N}$, akkor egy tetszőleges négyzet feldarabolható n darab négyzetre.

3) Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor az $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)$ szorzatban a 2 kitevője pontosan n.

4) Bizonyítsd be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén 2^n-nek létezik olyan egész számú többszöröse, amely csak az 1 és 2 számjegyekből áll.

5) Határozd meg a következő irracionális egyenletek valós megoldásait:

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[6]{4-x^2}=x$; **b)** $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[4]{x-4}=5$.

6) Oldd meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazában:

$$\begin{cases} x^2-yz=1 \\ y^2-xz=2 \\ z^2-xy=-1 \end{cases}$$

7) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$x \in \mathbb{R} \Big| x^2+mx-4=0 \ \cup \ x \in \mathbb{R} \Big| x^2+2x-2m=0$$

halmaznak pontosan két eleme legyen.

8) Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $2^{x+1}\cdot 3^{x-1}=5$; **b)** $8^x+6^x=12^x+9^x$; **c)** $x^2\cdot\log_3 x=9$

d) $2^{2^x}=2x+2$; **e)** $2^x=x^2$, ha $x \geq 0$.

9) Határozd meg az $\log_{x^2}\ x+2\ <1$ egyenlőtlenség valós megoldásait!

10) Határozd meg az $m \in R$ paraméter értékeit úgy, hogy a $z^3+\ 3+i\ z^2-3z-\ m+i\ =0$ egyenletnek legyen legalább egy valós gyöke!

11) Határozd meg a z komplex számot az alábbi egyenlőségekből!

a) $\ \overline{z}\ ^2+2z+1=0$; **b)** $z^2+\overline{z}=5+3i$; **c)** $|z-1|+2z=13+8i$;

d) $z^3=2+11i$.

12) Az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékei szerint tárgyald az $2x^3+3x^2-12x=m$ egyenlet valós megoldásainak a számát!