Összefoglaló feladatok
Analitikus mértan

1. Igazoljuk, hogy az a háromszög , amelynek csúcsai az $A(3,3)$, $B(6,3)$ és $C(3,6)$ pontok derékszögű és egyenlőszárú! Írjuk fel a háromszög oldalfelező merőlegeseinek az egyenleteit!

2. Adott egy háromszög két csúcsa: $A(-6,2)$ és $B(2,-2)$, valamint a $H(1,2)$ ortocentrum. Határozzuk meg a harmadik C csúcs koordinátáit! E:$C(2,4)$.

3. Adott az $A(1,-2)$, $B(5,4)$ és $C(-2,0)$ csúcsú háromszög . Határozzuk meg az A szög külső és belső szögfelezőjének az egyenletét! E: $-x+5y+11=0, 5x+y-3=0$.

4. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(8,9)$ ponton és amelynek az $x-2y+5=0$ valamint az $x-2y=0$ egyenesek közé eső szakaszának hossza 5.

5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög két szemközti csúcsa $A(1,0)$ és $D(0,\sqrt{3})$. Számítsuk ki a többi csúcs koordinátáit!

6. Egy négyzet egyik oldalának egyenlete $x+3y-5=0$. Határozzuk meg a négyzet többi oldalának az egyenleteit, ha tudjuk, hogy a négyzet szimmetriaközéppontja a $P(-1,0)$ pontban található.

   E: $-3x+y+3=0, -3x+y-9=0, x+3y-7=0$.

7. Adottak egy háromszög két oldalának egyenletei: $3x-2y+1=0$ és $x-y+1=0$ valamint az egyik oldalfelezőjének az egyenlete $2x-y-1=0$. Határozzuk meg a harmadik oldal egyenletét! E: $5x-3y-1=0$ vagy $x=3$.

8. Határozzuk meg egy háromszög oldalainak egyenletét, ha ismerjük az egyik csúcsot:

   a) $A(1,2)$ valamint két magasság egyenletét: $2x-3y+1=0$, $x+y=0$;

   b) $B(2,-1)$ valamint a különböző csúcsokhoz tartozó magasság $3x-4y+27=0$ és szögfelező $x-2y-5=0$ egyenleteit!

   E: a) $x-y+1=0$, $3x+2y-7=0$, $2x+3y+7=0$.

9. Egy paralelogramma területe 18, két csúcsa az $A(2,1)$ és B(5,-3) pont. A két átló az Oy tengelyen metszi egymást. Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit!

   E: $C_1(-2,\frac{37}{3}), D_1(-5,\frac{49}{3})$; $C_2(-2,\frac{1}{3}), D_2(-5,\frac{11}{3})$.

10. Mutassuk ki, hogy a

$$2x + 3y - 7 + \lambda(3x - y - 5) + \lambda^2(5x + 2y - 12) = 0$$

egyenes átmegy egy rögzített ponton, ha a λ paraméter változik. Mekkorák a rögzített pont koordinátái?

11. A derékszögű ABC háromszög BC befogójára a $CBDE$ négyzetet építjük kifelé. A BE és CD átlók G-ben metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az AG egyenes a BAC szöget felezi!

12. Határozzuk meg az ABC háromszög H magasságpontjának mértani helyét, ha a B és C csúcsok rögzítettek, az A csúcs pedig egy BC egyenessel páhuzamos egyenest ír le!

13. Adottak a $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ körök, amelyek kivülről érintik egymást a T pontban. Tekintjük az M illetve az N változó pontokat a $\mathcal{C}_1$ illetve a $\mathcal{C}_2$ körökről úgy, hogy az MT és NT egyenesek legyenek merőlegesek egymásra a T pontban. Határozzuk meg az $[MN]$ szakasz felezőpontjának mértani helyét!

14. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög és M a $[BC]$ szakasz felezőpontja. Jelöljünk N-nel egy olyan pontot az AB egyenesről, amelyre $A \in (BN)$. Az ABC háromszög H ortocentrumának a vetületei a $\widehat{BAC}$ illetve a $\widehat{CAN}$ szögek szögfelezőire legyenek P illetve Q. Igazoljuk, hogy az M, P és Q pontok kollineárisak.

15. Igazoljuk, hogy bármely ABC háromszögben a H magasságpont, a G súlypont és az O oldalfelező merőlegesek metszéspontja egy egyenesen vannak (Euler egyenes).

16. Legyen $ABCDEF$ egy teljes négyszög ($ABCD$ négyszög és $AB \cap CD = \{E\}$, $AD \cap BC = \{F\}$). Igazoljuk, hogy az AC, BD és EF átlók felezőpontjai kollineárisak (Gauss-Newton egyenes)!

17. Legyen a, b két metsző egyenes és $A_1, A_2, A_3 \in a$, $B_1, B_2, B_3 \in b$. Igazoljuk, hogy a $\{C_1\} = A_2B_3 \cap A_3B_2$, $\{C_2\} = A_1B_3 \cap A_3B_1$ és $\{C_3\} = A_1B_2 \cap A_2B_1$ pontok kollineárisak (Pappusz tétele)!